

Chapitre 1

Raisonnement et vocabulaire ensemblistes

1.1 Rudiments de logique

Définition 1.1 (Assertion) Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas en même temps vraie et fausse.

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, on définit de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q .

- L'assertion « P et Q » est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
- L'assertion « P ou Q » est vraie si et seulement si l'une des deux assertions P ou Q est vraie.
- L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
- L'assertion $\forall x \in E \ P(x)$ est vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E , se lit « Pour tout x appartenant à E , $P(x)$ », sous-entendu « Pour tout x appartenant à E , $P(x)$ est vraie ».
- L'assertion $\exists x \in E \ P(x)$ est vraie lorsqu'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie, se lit « Il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) ».

Les négations des quantificateurs correspondantes sont

- La négation de « $\forall x \in E \ P(x)$ » est « $\exists x \in E \ \text{non } P(x)$ ».
- La négation de « $\exists x \in E \ P(x)$ » est « $\forall x \in E \ \text{non } P(x)$ ».
- L'assertion « (non P) ou Q » est notée « $P \Rightarrow Q$ ».

Remarques 1.1 1. L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ (x + y > 0) \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ (x + y > 0)$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse.

2. Quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \ (f(x) = 0)$ ». Cela signifie seulement qu'il existe un réel x pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Dans un premier temps on peut lire la phrase ainsi : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) = 0$ ».

Implication

L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » se lit en français « P implique Q ».

Équivalence

L'équivalence est définie par : « $P \Leftrightarrow Q$ ». C'est l'assertion « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ ».

On dit : « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou encore « P si et seulement si Q ».

Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

Propositions 1.1 Soient P, Q, R trois assertions. On a les équivalences suivantes :

1. $P \Leftrightarrow \text{non}(\text{non}(P))$
2. $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
4. $\text{non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
5. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
6. $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. « $P \Rightarrow Q$ » \Leftrightarrow « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ »

Modes de raisonnement

Direct Pour montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Contraposé Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence des assertions : « $P \Rightarrow Q$ » et « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ».

Par l'absurde Pour montrer « $P \Rightarrow Q$ » : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Récurrence Pour démontrer une assertion $P(n)$, pour tout n appartenant à \mathbb{N} par récurrence en trois étapes : on prouve d'abord $P(0)$, puis pour $n \geq 0$ on suppose $P(n)$ vraie, et on montre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Par analyse-synthèse Le raisonnement se fait en deux étapes :

- Phase d'analyse : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- Phase de synthèse : on montre que les conditions obtenues sont suffisantes.

1.2 Ensembles

Définition 1.2 (Ensemble) On appelle ensemble une collection d'éléments. Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté \emptyset , ne contenant aucun élément.

Soit E un ensemble. L'écriture : $x \in E$, signifie que x est un élément de E . On dit que x appartient à E . Lorsque x n'appartient pas à E , on écrit $x \notin E$.

Considérons deux ensembles E et F . L'écriture : $E \subset F$, signifie que E est une partie de F ou E est un sous ensemble de F . On dit que E est inclus dans F .

On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Par exemple si $E = \{1,2\}$ alors $\mathcal{P}(1,2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

$E \cap F$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui sont à la fois dans E et dans F . Ainsi, $E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \in F\}$. $E \cap F$ se lit « E inter F ».

$E \cup F$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui sont soit dans E , soit dans F . Ainsi, $E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}$. $E \cup F$ se lit « E union F ».

On suppose que $A \subset B$. L'écriture: $B \setminus A$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à B sans appartenir à A .

Dans le cas où $A \subset B$ on a: $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = \mathbb{C}_E^A$, noté aussi \bar{A} . \mathbb{C}_E^A se lit « complémentaire de A dans E ».

Définition 1.3 (Produit cartésien) Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple 1.1 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Applications et relations

Définition 1.4 (Application) Une application (ou une fonction) $f: E \rightarrow F$, est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$.

Par exemple, l'application: $x \mapsto x$, de E dans lui même, est appelée application identique et est notée par: id_E ou 1_E . On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Définition 1.5 Soient $f: E \rightarrow F$ une application de E dans F , $a \in E$ et $b = f(a) \in F$. L'élément b est appelé image de a par f et a est l'antécédant de b . E est appelé ensemble de départ de f et F est l'ensemble d'arrivée de f .

Théorème 1.1 Deux applications $f,g: E \rightarrow F$ sont égales si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Le graphe de $f: E \rightarrow F$ est $\Gamma_f = \{(x,f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$.

Définition 1.6 (Famille d'éléments d'un ensemble) Soient E et I deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I , toute application de I dans E . L'ensemble I s'appelle ensemble des indices. Si $x: i \mapsto x(i)$ est une famille, on note x_i l'image de i par x et $(x_i)_{i \in I}$ cette famille.

Si I est une partie de \mathbb{N} , alors la famille est une suite.

Si I est un ensemble fini, alors la famille est dite finie.

Si E est remplacé par $\mathcal{P}(E)$, alors $(x_i)_{i \in I}$ est appelée une famille de parties de E .

Définition 1.7 (Indicatrice) La fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de l'ensemble E notée $\mathbb{1}_A$ est la fonction définie sur A qui vaut 1 sur A et 0 à l'extérieur de A :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A. \end{cases}$$

Définition 1.8 (Restriction et Prolongement) Soient E et F deux ensembles, E_1 un sous-ensemble de E , $f: E \rightarrow F$ et $f_1: E_1 \rightarrow F$. On suppose que pour tout élément x de E_1 , on a $f(x) = f_1(x)$. Alors, on dit que f_1 est la restriction de f à E_1 et que f est un prolongement de f_1 à E . On note $f_1 = f|_{E_1}$.

Définition 1.9 (Image directe/réciproque) Soient E et F deux ensembles $f: E \rightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. L'image directe par f de A , noté $f(A)$, est

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

L'image réciproque par f de B , notée $f^{-1}(B)$, est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Définition 1.10 (Composition d'applications) Soient $f: E \rightarrow F$, et $g: F \rightarrow G$ deux applications. On désigne par $g \circ f$, l'application de E dans G définie par: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, pour tout $x \in E$.

Soient E et F deux ensembles et $f: E \rightarrow F$.

1. On dit que f est *injective* si, pour tous $x, x' \in E$, on a: $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, ce qui est équivalent à: $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$.
2. On dit que f est *surjective* si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que: $y = f(x)$.
3. On dit que f est *bijective*, s'il existe une application $g: F \rightarrow E$ telle que: $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.

Lorsque f est bijective, l'application g est notée par f^{-1} et est appelée réciproque (ou inverse) de f .

Théorème 1.2 (Caractérisation de la bijection) On dit que f est bijective si et seulement si, f est à la fois injective et surjective, ou si et seulement si, pour tout $y \in F$, il existe un élément et un seul $x \in E$ tel que: $y = f(x)$.

Théorème 1.3 Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Définition 1.11 (Relation binaire) Une relation binaire sur un ensemble E , est la donnée pour tout couple $(x, y) \in E \times E$ de « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de « Faux » sinon.

Définition 1.12 (Relation d'équivalence) Soit \mathcal{R} une relation binaire entre éléments de E . \mathcal{R} est dite une relation d'équivalence si elle possède les propriétés suivantes:

- i) \mathcal{R} est *réflexive*: pour tout élément x de E on a: $x\mathcal{R}x$.
- ii) \mathcal{R} est *symétrique*: $x\mathcal{R}y$ entraîne $y\mathcal{R}x$.
- iii) \mathcal{R} est *transitive*: pour tous x, y et z éléments de E si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Définition 1.13 (Partition d'un ensemble) Une partition de E est un ensemble de parties non vides de E , disjointes deux à deux, dont la réunion est E .

Définition 1.14 (Classe d'équivalence) Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . Soit $x \in E$, la classe d'équivalence de x est

$$cl(x) = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}.$$

$cl(x)$ est donc un sous-ensemble de E , on le note aussi \bar{x} . Si $y \in cl(x)$, on dit que y est un représentant de $cl(x)$.

Théorème 1.4 (Propriétés des classes d'équivalence) Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'équivalence. On a les propriétés suivantes :

- i) $cl(x) = cl(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.
- ii) Pour tout $x, y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$.
- iii) Soit C un ensemble de représentants de toutes les classes alors $\{cl(x) \mid x \in C\}$ constitue une partition de E .

Définition 1.15 (Congruence) • La relation dans \mathbb{R} définie, quels que soient x et x' de \mathbb{R} , par :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que } x - x' = k2\pi$$

est une relation d'équivalence appelée congruence modulo 2π dans \mathbb{R} . On écrit : $x \equiv x' [2\pi]$.

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo n si $n \mid (b - a)$, i.e. s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$; cette relation entre a et b se note $a \equiv b [n]$.

Définition 1.16 (Relation d'ordre) Une relation binaire \mathcal{R} est une relation d'ordre dans un ensemble E , si elle est réflexive, antisymétrique (c'est à dire si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$) et transitive.

Définition 1.17 (Ordre total, ordre partiel) Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur E . On dit que \mathcal{R} définit un ordre total sur E lorsque deux éléments de E sont toujours comparables pour \mathcal{R} , c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x).$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

1.4 Exercices résolus

Exercice 1.1 Soient les quatre assertions suivantes :

- a) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
- b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
- c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
- d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Solution.

- a) L'assertion est fausse, car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.
- b) L'assertion est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$.
- c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1, y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$.
- d) L'assertion est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$.

Exercice 1.2 Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

- a) $P \Rightarrow Q$,
 b) P et non Q ,
 c) P et (Q et R),
 d) P ou (Q et R),
 e) $(P$ et $Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

Solution.

- a) P et non Q ;
 b) « non P ou Q » ce qui est la même chose que « $P \Rightarrow Q$ »;
 c) (non P) ou ((non Q) ou (non R));
 d) non P et (non Q ou R) (ici les parenthèses sont importantes);
 e) P et Q et R et non S .

Exercice 1.3 Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Solution. On prend $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$. On rappelle que \mathbb{Q} est l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. On a $a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$. Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de \mathbb{Z} ; le dénominateur qq' est lui un élément de \mathbb{N}^* . Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}, q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 1.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution. Par l'absurde, on suppose que n n'est pas pair. On veut montrer que n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$ avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, et donc n^2 est impair. On a montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 1.5 Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Solution. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ on obtient $a+b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Exercice 1.6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Solution. Pour $n \geq 0$, on note $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$.
On va démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe $n \geq 0$. On suppose que $P(n)$ est vraie. On montre que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car par } P(n) \text{ on sait que } 2^n > n, \\ &> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 1.7 Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solution. Si l'on a $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, alors $2q^2 = p^2$; et donc p est pair. Par suite : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. D'où $q^2 = 2k^2$, alors q est pair. Ceci contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Exercice 1.8 On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont la même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intruse ?

Solution. On compare deux paquets de trois billes.

- Si l'un est plus lourd que l'autre, c'est qu'il contient l'intrus.
- Sinon, l'intrus est parmi les trois billes restantes.

Ainsi, on sait dans quel paquet de trois billes se trouve l'intruse. Dans ce problème, on compare deux billes.

- Si l'une est plus lourde que l'autre, c'est l'intruse.
- Sinon, l'intruse est la troisième.

Exercice 1.9 On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une.

Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intruse en trois pesées ?

Solution. On note 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nos billes.

On commence par comparer 2 lots constitués de 1,2,3 et de 4,5,6. Si ceux-ci ont même masse alors l'intruse est parmi 7,8,9 et l'on peut utiliser la bille 1 comme bille témoin. On compare alors les billes 1 et 7 puis les billes 1 et 8 pour démasquer l'intruse. Si en revanche les deux premiers lots n'ont pas même masse, l'intruse se trouve parmi l'un deux. La bille 9 servira alors de bille témoin. Pour fixer les idées (et sans perte de généralités), on suppose que le premier lot est plus lourd que le second. On compare les billes 1 et 4 avec les billes 2 et 5.

Si celles-ci ont même masse commune, l'intruse se trouve dans les deux autres billes 3 et 6. Une comparaison de 3 avec 9 permet alors de savoir qui est l'intrus de 3 ou de 6. Si celles-ci n'ont pas même masse commune, pour fixer les idées (et sans perte de généralités), on suppose que 1 et 4 soient plus lourdes que 2 et 5. Si l'intruse est plus lourde que ses congénères alors cela ne peut ni être 4 ni être 2 à cause respectivement des première et deuxième pesées. Si l'intruse est plus légère que ses congénères alors cela ne peut ni être 2 ni être 4 à cause respectivement des première et deuxième pesées. Dans tous les cas l'intrus est soit 1, soit 5. Une comparaison de la bille 1 avec la bille 9 permet alors de démasquer cette intruse.

Exercice 1.10 Soient f, g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

- a) f est majorée ;
- b) f est bornée ;
- c) f est paire ;
- d) f est impaire ;
- e) f ne s'annule jamais ;
- f) f est périodique ;
- g) f est croissante ;
- h) f est strictement décroissante ;
- i) f n'est pas la fonction nulle ;
- j) f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
- k) f atteint toutes les valeurs de \mathbb{N} ;
- l) f est inférieure à g ;
- m) f n'est pas inférieure à g .

Solution.

- a) $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq M$;
- b) $\exists M \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} m \leq f(x) \leq M$;
- c) $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = f(-x)$;
- d) $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = -f(-x)$;
- e) $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \neq 0$;
- f) $\exists a \in \mathbb{R}^* \forall x \in \mathbb{R} f(x+a) = f(x)$;
- g) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$;
- h) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
- i) $\exists x \in \mathbb{R} f(x) \neq 0$;