Chapitre 1

Fondamentaux de calcul en analyse

INEGALITE DANS $\mathbb{R}$

Ordre dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ muni de l'addition $+$, de la multiplication $\times$ et de la relation d'ordre $\leq$, est *totalement ordonné* :

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

1. $(a \leq b,\, c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)$
2. $(0 \leq a,\, c \leq d) \Rightarrow (a.c \leq a.d)$.

Valeur absolue

Définition

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriétés

$\mid x \mid = \max(x, -x)$, et l'inégalité triangulaire s'écrit :

$$\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid .$$

$x^+ = \max\{x,0\}$ et $x^- = \min\{-x,0\}$, on a :

$$x = x^+ - x^-,\ \mid x \mid = x^+ + x^-,\ x^+ = \frac{\mid x \mid + x}{2},\ x^- = \frac{\mid x \mid - x}{2}.$$

Parties bornées de $\mathbb{R}$

A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. A est *majorée* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A : x \leq b$.
2. A est *minorée* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A : x \geq a$.
3. A est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est d'un des types suivants :

1. Intervalle ouvert borné : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
2. Intervalle semi-ouvert : $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ et $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$;
3. Intervalle fermé borné : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;
4. Intervalle ouvert majoré et non minoré : $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;
5. Intervalle fermé majoré et non minoré : $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$;
6. Intervalle ouvert minoré et non majoré : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$;
7. Intervalle fermé minoré et non majoré : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$;
8. Intervalle non majoré et non minoré : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Borne supérieure $c = \sup(A) = \sup\{x \mid x \in A\}$.

Si $c \in A$, il est le plus grand élément de A et $c = \max(A)$.

Borne inférieure $m = \inf(A) = \inf\{x \mid x \in A\}$.

Si $m \in A$, il est le plus petit élément de A et $m = \min(A)$.

Théorème Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure et toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Application : $A =]0,1[$. Tous les réels négatifs ou nuls minorent A. Le plus grand des minorants est 0. Tous les réels supérieurs ou égaux à 1 majore A. Le plus petit des majorants est 1. Il ne s'agit ni de minimum ni de maximun, puisque ni $\inf A$ ni $\sup A$ n'appartiennent à A.

FONCTIONS REELLES OU COMPLEXES

Pour toute fonction réelle, il existe l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, tel que f est une application de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$.

Définition La courbe représentative de f est
$\mathcal{C}_f = \{(x,f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$.

Fonction paire

$$\forall x \in \mathcal{D}_f : -x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = f(x).$$

Fonction impaire

$$\forall x \in \mathcal{D}_f : -x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Fonction périodique de période $T > 0$

$$x \in D_f, x + T \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

Opérations sur les fonctions réelles

- Addition : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- Multiplication : $(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$;
- Composition : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Monotonie : $\forall x,x' \in I \subset \mathbb{R}$. On a sur l'intervalle I, :

1. f est croissante si $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.
2. f est strictement croissante si $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.
3. f est décroissante si $x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$.
4. f est strictement décroissante si $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.
5. f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Application : $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$.

Théorème f est une bijection continue sur I de $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est obtenu par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonction majorée, minorée, bornée sur l'intervalle I

1. f est majorée si $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est majoré.
2. f est minorée si $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est minoré.
3. f est bornée si $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est borné.

Applications

1. f et g définies respectivement par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$, sont majorées sur $\mathbb{R}$ par 1, minorées sur $\mathbb{R}$ par -1 donc bornées sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x) = \exp x$, est non majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$ par conséquent non bornée sur $\mathbb{R}$.

Extremas. Soient f une fonction réelle définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. f présente un maximum en a si $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in I - \{a\}$,
2. f présente un maximum strict en a si $f(x) < f(a)$, $\forall x \in I$,
3. f présente un minimum en a si $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in I - \{a\}$,
4. f présente un minimum strict en a si $f(x) > f(a)$, $\forall x \in I$.

☞ f est bornée $\Leftrightarrow \mid f \mid$ est majorée.

DERIVATION

Dérivée en un point : Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. f est dérivable en a si la limite

$\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$ existe et est finie, c'est la dérivée de f en a.

Fonction dérivée : f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$. L'application $f'\colon x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f.

Equation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point a est : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$

Propriétés des fonctions dérivables

$$\boxed{\begin{gathered}(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \\ (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \\ (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \\ (g\circ f)'(a) = g'(b)\times f'(a) = g'(f(a))\times f'(a). \\ (f^{-1})'(b) = \frac{1}{(f'\circ f^{-1})(b)}\end{gathered}}$$

Relation monotonie et dérivée

- f est croissante (resp. strictement croissante) sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$).
- f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$).
- f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Dérivées successives est $f^{(p+1)}(a)$ d'ordre $p+1$ de f en a, la dérivée (si elle existe) de l'application $f^{(p)}\colon x \to f^{(p)}(x)$.

Dérivation d'une fonction complexe. Soient $f\colon I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. f est dérivable en $a \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont :

$$f'(a) = \mathrm{Re}'(f)(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}'(f)(a).$$

On a les mêmes formules de dérivation qu'une fonction réelle.

Théorème Pour toute fonction ϕ dérivable sur I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \exp(\phi(x))$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto \phi'(x)\exp(\phi(x))$.

FONCTIONS USUELLES

Logarithme népérien est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

ln est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; en particulier $\ln e = 1$; $e = 2{,}71828$ avec une incertitude égale à 5.10^{-6}.

Exponentielle. La bijection réciproque de ln est $x \mapsto \exp x$. $\exp x = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. exp est une bijection croissante, continue et dérivable.
Propriétés de ln **et** exp **:** $\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$.

ln	exp
$\ln(1) = 0,$	$\ln(\exp x) = x,$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$	$\exp(0) = 1,$
$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b),$	$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b,$
$\ln(a^r) = r\ln(a).$	$(\exp a)^b = \exp(ab),$
$\ln'(x) = \frac{1}{x},$	$\exp'(x) = \exp(x)$
$\exp(\ln a) = a \quad (a > 0),$	

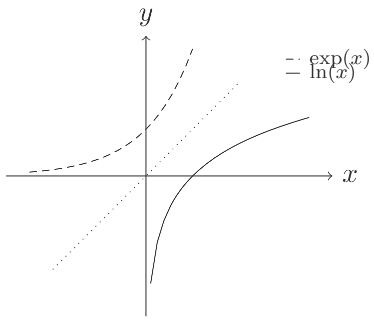

FIG. 1.1 – *Fonctions logarithme et exponentielle*

Limites usuelles de $\ln$ **et** $\exp$ **:**

$\ln$	$\exp$
$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,$	$\lim_{x\to -\infty} \exp x = 0,$
$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$	$\lim_{x\to +\infty} \exp x = +\infty,$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$	$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1,$
$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$	$\lim_{x\to -\infty} x \exp x = 0.$

Fonction puissance d'exposant α (réel) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $\boxed{x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).}$

$f(x) = x^\alpha$. f est dérivable et $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.}$

Régles de calcul sur les puissances : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$	$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$	$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \lvert \ln x\rvert^\beta = 0$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
$\lim_{x\to -\infty} \lvert x\rvert^\alpha e^x = 0$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Fonctions sinus (sin), cosinus (cos) et tangente (tan) :

- sin est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et impaire.
- cos est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et paire.
- tan est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, périodique de période π et impaire.

Propriétés des fonctions circulaires

$\sin'(x) = \cos x.$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
$\cos' x = -\sin x.$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$
$\tan' x = 1 + \tan^2 x.$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{x} = 1.$

Fonctions circulaires réciproques

- La fonction réciproque de sin, est Arcsin x. Elle est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$:

$$\boxed{\begin{aligned}&(y = \mathrm{Arcsin}\, x, \ -1 \le x \le 1)\\ \Rightarrow &\left(x = \sin(y), \ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}}$$

- La fonction réciproque de cos, est Arccos. Elle est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$:

$$\boxed{(y = \mathrm{Arccos}\, x, -1 \le x \le 1) \Rightarrow (x = \cos(y), 0 \le y \le \pi)}$$

- La fonction réciproque de tan, est Arctan. Elle est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$:

$$\boxed{(y = \mathrm{Arctan}\, x, x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x = \tan y), \ -\tfrac{\pi}{2} < y < \tfrac{\pi}{2})}$$

Relations entre les circulaires réciproques

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}\\ \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}.\\ \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \tfrac{\pi}{2}.\\ \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \tfrac{1}{x} = \tfrac{\pi}{2}.\\ \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \tfrac{1}{x} = -\tfrac{\pi}{2}.\end{gathered}}$$