

Table des matières

1	Structures algébriques usuelles	1
1.1	Groupes et sous-groupes	1
1.2	Morphismes de groupes	2
1.3	Groupes monogènes et cycliques	2
1.4	Ordre d'un élément dans un groupe	2
1.5	Anneaux	3
1.6	Idéaux d'un anneau commutatif	4
1.7	L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	5
1.8	Anneaux de polynômes à une indéterminée	5
1.9	Algèbres	6
1.10	Exercices résolus	6
1.11	Problèmes résolus	16
2	Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	19
2.1	Généralités	19
2.2	Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	19
2.3	Polynôme caractéristique	20
2.4	Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	21
2.5	Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	21
2.6	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	21
2.7	Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	22
2.8	Lemme de décomposition des noyaux	22
2.9	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	22
2.10	Endomorphismes à polynôme minimal scindé	22
2.11	Exercices résolus	22
2.12	Problèmes résolus	38
3	Fonctions convexes	41
3.1	Parties convexes d'un espace vectoriel réel	41
3.2	Fonctions convexes d'une variable réelle	41
3.3	Fonctions convexes dérivables	41
3.4	Exercices résolus	42
3.5	Problèmes résolus	49

4	Topologie des espaces normés	57
4.1	Normes et espaces vectoriels normés	57
4.2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	59
4.3	Comparaison des normes	60
4.4	Topologie d'un espace normé	60
4.5	Étude locale d'une application, continuité	61
4.6	Parties compactes d'un espace normé	63
4.7	Applications continues sur une partie compacte	64
4.8	Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	64
4.9	Espaces vectoriels normés de dimension finie	64
4.10	Exercices résolus	65
4.11	Problèmes résolus	86
5	Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens	91
5.1	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	91
5.2	Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	92
5.3	Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	92
5.4	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	92
5.5	Exercices résolus	93
5.6	Problèmes résolus	107
6	Séries et familles sommables	111
6.1	Séries numériques et vectorielles	111
6.1.1	Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	111
6.1.2	Compléments sur les séries numériques	112
6.2	Familles sommables de nombres complexes	112
6.2.1	Ensembles dénombrables, au plus dénombrables	112
6.2.2	Familles sommables	112
6.2.3	Applications des familles sommables	113
6.3	Exercices résolus	113
6.4	Problèmes résolus	127
7	Suites et séries de fonctions, séries entières	131
7.1	Suites et séries de fonctions	131
7.1.1	Convergence simple, convergence uniforme	131
7.1.2	Continuité, double limite	132
7.1.3	Intégration d'une limite uniforme sur un segment	132
7.1.4	Dérivation d'une suite de fonctions	133
7.1.5	Séries de fonctions	133
7.1.6	Approximation uniforme	133
7.2	Séries entières	133
7.2.1	Généralités	133
7.2.2	Série entière d'une variable réelle	134
7.2.3	Fonctions développables en série entière, développements usuels	135

7.3	Exercices résolus	135
7.4	Problèmes résolus	161
8	Fonctions vectorielles, arcs paramétrés	165
8.1	Dérivabilité en un point	165
8.2	Opérations sur les fonctions dérivables	166
8.3	Intégration sur un segment	167
8.4	Intégrale fonction de sa borne supérieure	168
8.5	Formules de Taylor	168
8.6	Arcs paramétrés	169
8.7	Exercices résolus	169
8.8	Problèmes résolus	186
9	Intégration sur un intervalle quelconque	189
9.1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	189
9.2	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$	190
9.3	Intégration sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$: cas des fonctions positives	190
9.4	Intégration sur un intervalle quelconque	191
9.5	Intégration des relations de comparaison	192
9.6	Passage à la limite sous l'intégrale	193
9.7	Continuité d'une intégrale à paramètre	193
9.8	Dérivation d'une intégrale à paramètre	193
9.9	Exercices résolus	194
9.10	Problèmes résolus	207
10	Variables aléatoires discrètes	211
10.1	Espaces probabilisés	211
10.2	Propriétés élémentaires des probabilités	212
10.3	Probabilités conditionnelles et indépendance	212
10.4	Variables aléatoires discrètes	213
10.5	Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes	214
10.6	Lois usuelles	214
10.7	Espérance	215
10.8	Variance, écart-type et covariance	215
10.9	Loi faible des grands nombres	217
10.10	Fonctions génératrices	217
10.11	Exercices résolus	218
10.12	Problèmes résolus	240
11	Équations différentielles linéaires	243
11.1	Généralités	243
11.2	Solutions d'une équation différentielle linéaire	244
11.3	Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	244

11.4	Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	245
11.5	Méthode de variation des constantes	246
11.6	Équations différentielles scalaires du second ordre	246
11.7	Exercices résolus	247
11.8	Problèmes résolus	273
12	Calcul différentiel	277
12.1	Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	277
12.2	Différentielle	277
12.3	Opérations sur les applications différentiables	279
12.4	Cas des applications numériques	279
12.5	Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	280
12.6	Applications de classe \mathcal{C}^1	280
12.7	Applications de classe \mathcal{C}^k	281
12.8	Exercices résolus	282
12.9	Problèmes résolus	293
13	Problèmes de synthèse	297
13.1	Structures algébriques usuelles	297
13.2	Fonctions vectorielles	306
13.3	Intégration sur un intervalle quelconque	309
13.4	Espace préhilbertien réel	340
13.5	Séries entières	351
13.6	Topologie des espaces normés	359
13.7	Probabilité	368
13.8	Réduction des endomorphismes	381
13.9	Série de fonctions	419