

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Programme de début d'année</b>	<b>11</b>
<b>0</b>	<b>Éléments de logique, modes de raisonnement</b>	<b>13</b>
I	Éléments de logique . . . . .	13
II	Le raisonnement par récurrence . . . . .	18
<b>1</b>	<b>Calculs algébriques</b>	<b>23</b>
I	Sommes et produits . . . . .	23
II	Factorielles et coefficients binomiaux . . . . .	33
III	Systèmes linéaires . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>47</b>
I	Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . . .	47
II	Le groupe $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 . . . . .	53
III	Racines $n^{\text{es}}$ de l'unité . . . . .	68
IV	Résolution d'équations du second degré . . . . .	72
V	L'exponentielle complexe . . . . .	76
VI	Nombres complexes et géométrie plane . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Ensembles, applications, relations binaires</b>	<b>85</b>
I	Vocabulaire relatif aux ensembles . . . . .	85
II	Applications . . . . .	90
III	Injection, surjection, bijection . . . . .	100
IV	Relations . . . . .	108
V	L'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ . . . . .	114
VI	Familles . . . . .	119
<b>4</b>	<b>Généralités sur les fonctions</b>	<b>121</b>
I	Généralités sur les fonctions . . . . .	121
II	Dérivation . . . . .	133
III	Primitives . . . . .	139
IV	Étude d'une fonction . . . . .	144
V	Brève extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>155</b>
I	Logarithme et exponentielle . . . . .	155

II	Fonctions puissances . . . . .	161
III	Croissances comparées . . . . .	166
IV	Fonctions circulaires . . . . .	168
V	Fonctions circulaires réciproques . . . . .	170
VI	Fonctions hyperboliques . . . . .	181
VII	Annexe : formulaires de trigonométries circulaire et hyperbolique . . . . .	186
<b>6</b>	<b>Équations différentielles linéaires</b>	<b>189</b>
I	EDL homogène du premier ordre . . . . .	190
II	EDL du premier ordre avec second membre . . . . .	192
III	EDL homogène du second ordre à coefficients constants . . . . .	202
IV	EDL du second ordre à coefficients constants avec second membre . . . . .	207
<b>II</b>	<b>Algèbre I</b>	<b>219</b>
<b>7</b>	<b>Groupes, anneaux et corps</b>	<b>221</b>
I	Groupes . . . . .	221
II	Anneaux et corps . . . . .	232
<b>8</b>	<b>Arithmétique</b>	<b>241</b>
I	Divisibilité et division euclidienne . . . . .	241
II	PGCD et PPCM . . . . .	247
III	Entiers premiers entre eux . . . . .	258
IV	Nombres premiers . . . . .	266
V	Congruences . . . . .	272
<b>9</b>	<b>Polynômes</b>	<b>277</b>
I	L'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes . . . . .	277
II	Divisibilité et division euclidienne . . . . .	287
III	Fonctions polynomiales . . . . .	293
IV	Polynôme dérivé . . . . .	299
V	Polynôme scindé . . . . .	306
VI	Interpolation polynomiale de Lagrange . . . . .	310
<b>10</b>	<b>Arithmétique des polynômes</b>	<b>315</b>
I	PGCD et PPCM . . . . .	315
II	Polynômes premiers entre eux . . . . .	323
III	Polynômes irréductibles . . . . .	328
<b>11</b>	<b>Fractions rationnelles</b>	<b>335</b>
I	Corps des fractions rationnelles . . . . .	335
II	Étude locale d'une fraction rationnelle . . . . .	343

---

<b>III</b>	<b>Analyse I</b>	<b>357</b>
<b>12</b>	<b>Nombres réels</b>	<b>359</b>
I	Ensembles usuels de nombres . . . . .	359
II	La borne supérieure dans $\mathbb{R}$ . . . . .	362
III	Conséquences de la propriété de la borne supérieure . . . . .	365
<b>13</b>	<b>Suites</b>	<b>371</b>
I	Convergence et divergence d'une suite réelle . . . . .	371
II	Suites réelles monotones . . . . .	388
III	Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	393
IV	Caractérisations séquentielles . . . . .	397
V	Suites de référence . . . . .	401
VI	Brève extension aux suites complexes . . . . .	406
<b>14</b>	<b>Comparaison des suites</b>	<b>411</b>
I	Relation de domination . . . . .	411
II	Relation de négligeabilité . . . . .	413
III	Relation d'équivalence . . . . .	415
IV	Pratique de la comparaison des suites . . . . .	419
<b>15</b>	<b>Limites et continuité des fonctions</b>	<b>425</b>
I	Notion de limite . . . . .	425
II	Notion de continuité . . . . .	440
III	Fonctions monotones . . . . .	447
<b>16</b>	<b>Continuité sur un intervalle</b>	<b>451</b>
I	Continuité sur un intervalle . . . . .	451
II	Fonctions monotones . . . . .	456
III	Brève extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	461
IV	Annexe : preuve du théorème des bornes . . . . .	464
<b>17</b>	<b>Comparaison locale des fonctions</b>	<b>467</b>
I	Comparaison des fonctions au voisinage d'un point . . . . .	467
II	Pratique de la comparaison locale des fonctions . . . . .	474
III	Développements limités . . . . .	476
IV	Annexe : développements limités des fonctions usuelles . . . . .	497
<b>18</b>	<b>Dérivation</b>	<b>499</b>
I	Dérivation en un point . . . . .	499
II	Étude globale de la dérivation sur un intervalle . . . . .	511
III	Dérivées successives . . . . .	524
IV	Brève extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	530

<b>IV</b>	<b>Algèbre II</b>	<b>535</b>
<b>19</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>537</b>
I	Espaces vectoriels . . . . .	537
II	Sous-espaces vectoriels . . . . .	542
III	Familles génératrices, libres, bases . . . . .	548
IV	Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	558
<b>20</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>569</b>
I	Définition et premières propriétés . . . . .	569
II	Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel, image, noyau . . . . .	576
III	Applications linéaires et familles de vecteurs . . . . .	580
IV	Détermination d'une application linéaire . . . . .	583
V	Endomorphismes d'un espace vectoriel . . . . .	587
VI	Formes linéaires et hyperplans . . . . .	597
<b>21</b>	<b>Espaces vectoriels de dimension finie</b>	<b>603</b>
I	Espace vectoriel de dimension finie . . . . .	603
II	Sous-espaces vectoriels et dimension finie . . . . .	611
III	Applications linéaires en dimension finie . . . . .	622
IV	Polynômes . . . . .	631
<b>22</b>	<b>Sous-espaces affines</b>	<b>635</b>
I	Structure affine . . . . .	635
II	Sous-espaces affines . . . . .	637
III	Équations linéaires . . . . .	641
IV	Notion de repère affine . . . . .	655
<b>23</b>	<b>Calcul matriciel</b>	<b>657</b>
I	Calcul matriciel . . . . .	657
II	L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	666
<b>24</b>	<b>Matrices et applications linéaires</b>	<b>677</b>
I	Matrices et applications linéaires . . . . .	677
II	Changements de base, équivalence et similitude . . . . .	690
<b>25</b>	<b>Opérations élémentaires sur les matrices, systèmes linéaires</b>	<b>703</b>
I	Opérations élémentaires sur les matrices . . . . .	703
II	Systèmes linéaires . . . . .	717
<b>V</b>	<b>Analyse II</b>	<b>723</b>
<b>26</b>	<b>Intégration sur un segment</b>	<b>725</b>
I	Fonctions en escalier, continues par morceaux et uniformément continues . . . . .	725
II	Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	734
III	Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	740

IV	Sommes de Riemann . . . . .	754
V	Brève extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	758
<b>27</b>	<b>Intégration et dérivation</b>	<b>761</b>
I	Primitives et intégrales . . . . .	761
II	Formules de Taylor . . . . .	770
III	Retour sur les développements limités . . . . .	775
IV	Brève extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	780
V	Calcul de primitives . . . . .	783
<b>28</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>789</b>
I	Généralités . . . . .	789
II	Séries à termes positifs . . . . .	796
III	Absolute convergence . . . . .	805
IV	Développement décimal propre d'un réel . . . . .	811
<b>VI</b>	<b>Algèbre III</b>	<b>817</b>
<b>29</b>	<b>Groupe symétrique</b>	<b>819</b>
I	Le groupe symétrique de type $n$ . . . . .	819
II	Décomposition d'une permutation . . . . .	821
III	Signature d'une permutation . . . . .	827
<b>30</b>	<b>Déterminant</b>	<b>829</b>
I	Formes $n$ -linéaires . . . . .	829
II	Déterminant dans une base d'une famille de vecteurs . . . . .	833
III	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	836
IV	Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	839
V	Calcul des déterminants . . . . .	842
VI	Applications des déterminants . . . . .	857
VII	Annexe : preuve de l'existence du déterminant . . . . .	859
<b>31</b>	<b>Espaces préhilbertiens réels</b>	<b>863</b>
I	Produit scalaire . . . . .	863
II	Espace vectoriel euclidien . . . . .	881
III	Projections orthogonales, distances . . . . .	885
IV	Formes linéaires, hyperplans, hyperplans affines . . . . .	889
V	Produit mixte dans un espace euclidien . . . . .	898
<b>32</b>	<b>Isométries, matrices orthogonales</b>	<b>903</b>
I	Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) . . . . .	903
II	Matrices orthogonales . . . . .	909
III	Isométries vectorielles du plan . . . . .	915

<b>VII</b>	<b>Probabilités</b>	<b>923</b>
<b>33</b>	<b>Ensembles finis et dénombrement</b>	<b>925</b>
I	Ensembles finis . . . . .	925
II	Dénombrement . . . . .	931
III	Annexe : démonstrations non exigibles . . . . .	937
<b>34</b>	<b>Probabilités sur un univers fini</b>	<b>943</b>
I	Expériences aléatoires et événements . . . . .	943
II	Probabilité . . . . .	946
III	Probabilité conditionnelle . . . . .	953
IV	Indépendance . . . . .	962
<b>35</b>	<b>Variables aléatoires</b>	<b>969</b>
I	Notion de variable aléatoire . . . . .	969
II	Espérance d'une variable aléatoire . . . . .	974
III	Variance et écart-type . . . . .	979
IV	Lois usuelles . . . . .	984
<b>36</b>	<b>Vecteurs aléatoires</b>	<b>991</b>
I	Notion de couple de variables aléatoires . . . . .	991
II	Indépendance de variables aléatoires . . . . .	1001
III	Covariance . . . . .	1014
	<b>Table des symboles</b>	<b>1021</b>
	<b>Index</b>	<b>1025</b>