Chapitre 0

Éléments de logique, modes de raisonnement

I Éléments de logique

I.1 Assertions, propositions et théorèmes

Une *assertion* ou *proposition* est une phrase mathématique p qui est soit vraie (V) soit fausse (F) mais pas les deux. On consigne ces deux possibilités dans une table de vérité :

p
V
F

Par exemple,
$3 = 2 + 1$ est une assertion dont la valeur de vérité est V ;
$3 = 3 \times 2$ est une assertion dont la valeur de vérité est F ;
$3 = 3\times$ n'est pas une assertion ;
$3 = 3 + x$ est une assertion dont la valeur de vérité dépend de la valeur du réel x (par exemple, pour $x = 0$, elle est vraie et pour $x = 1$, elle est fausse).

Un *théorème* est une assertion dont la valeur de vérité est V. Par abus de langage, dans les cours de mathématiques en général et dans cet ouvrage en particulier, le mot proposition désigne souvent une proposition vraie, c'est-à-dire un théorème. Le mot théorème est en effet réservé aux résultats les plus fondamentaux.

Nous distinguerons ici quatre sortes de propositions vraies :
- les propositions,
- les théorèmes,

- les *corollaires*, qui sont des propositions vraies obtenues comme conséquences d'autres théorèmes,
- les *lemmes*, qui sont des propositions vraies servant à établir des théorèmes plus importants.

I.2 Négation et connecteurs logiques

La négation d'une assertion p est l'assertion notée non p dont la table de vérité est la suivante :

p	non p
V	F
F	V

À partir de deux assertions quelconques p et q, on en fabrique de nouvelles à l'aide des connecteurs logiques « et » (conjonction) « ou » (disjonction) « $\Longrightarrow$ » (implication), « $\Longleftrightarrow$ » (équivalence logique), définis par :

p	q	p et q	p ou q	p $\Longrightarrow$ q	q $\Longrightarrow$ p	p $\Longleftrightarrow$ q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Vocabulaire : dans l'implication $p \Longrightarrow q$, p est l'*hypothèse*, q est la *conclusion*. Lorsque $p \Longrightarrow q$ est vraie, on sait que si p est vraie, alors q l'est aussi. Mais si p est fausse on ne peut rien dire de q. On dit que p vraie est une *condition suffisante* pour que q soit vraie. On dit également que q vraie est une *condition nécessaire* pour que p soit vraie.

L'implication $q \Longrightarrow p$ est l'*implication réciproque* de $p \Longrightarrow q$. Attention, elles n'ont pas la même table de vérité.

Remarque. En pratique, on écrit souvent $p \Longrightarrow q$ pour dire que $p \Longrightarrow q$ est vraie.

On notera que le ou mathématique n'est pas exclusif : p ou q est vraie signifie que l'une au moins de p ou q est vraie, elles peuvent êtres vraies toutes les deux.

I.3 Assertions logiquement équivalentes

On dit que deux assertions sont logiquement équivalentes lorsqu'elles ont la même table de vérité.

Exemples.

$$\begin{array}{rcl}
\text{non}(\text{non } p) & \Longleftrightarrow & p \\
\text{non}(p \text{ et } q) & \Longleftrightarrow & (\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q) \\
\text{non}(p \text{ ou } q) & \Longleftrightarrow & (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q) \\
p \Longrightarrow q & \Longleftrightarrow & (\text{non } p) \text{ ou } q \\
\text{non}(p \Longrightarrow q) & \Longleftrightarrow & p \text{ et } (\text{non } q) \\
(p \Longleftrightarrow q) & \Longleftrightarrow & (p \Longrightarrow q) \text{ et } (q \Longrightarrow p)
\end{array}$$

Le *raisonnement par contraposée* repose sur l'équivalence logique :

$$(p \Longrightarrow q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\text{non } q \Longrightarrow \text{non } p)$$

Pour montrer $p \Longrightarrow q$, au lieu de supposer p et d'en déduire q, on suppose non q et on en déduit non p.

Exemple. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrons par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair. On suppose que n est impair. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Il s'ensuit que

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

L'entier n^2 est donc impair. Par contraposée, on en déduit l'implication

$$n^2 \text{ est pair} \qquad \Longrightarrow \qquad n \text{ est pair}$$

Principe du *raisonnement par l'absurde* : pour montrer que $p \Longrightarrow q$ est vraie, on suppose que p est vraie et que q est fausse, et on montre que cela entraîne une contradiction. Ce principe repose sur l'équivalence logique :

$$(p \Longrightarrow q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{non(p et (non q))}$$

Exemple. Démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Alors $\sqrt{2}\, q = p$, d'où $2q^2 = p^2$. Il s'ensuit que $2|p^2$ donc p^2 est pair, puis p est pair, d'après l'exemple précédent. Donc $4|p^2$, et par conséquent $2|q^2$, donc q est pair d'après le même raisonnement : c'est contradictoire avec p et q premiers entre eux. L'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ aboutit à une contradiction donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

I.4 Quantificateurs et leurs négations

$\forall x \in E$ se lit « quel que soit l'élément x dans E ».
$\exists x \in E$ se lit « il existe un élément x dans E » (au sens de au moins un, pas forcément exactement un).
$\forall x \in E\ \mathscr{P}(x)$ signifie que pour tout élément x pris dans E la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée.
$\exists x \in E\ \mathscr{P}(x)$ signifie qu'il existe au moins un élément x de E tel que la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée.
$\exists !\, x \in E\ \mathscr{P}(x)$ signifie qu'il existe exactement un élément x de E tel que la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée.

$$\begin{array}{lcl} \text{non}(\forall x \in E \quad \mathscr{P}(x)) & \iff & \exists x \in E \quad \text{non}\mathscr{P}(x) \\ \text{non}(\exists x \in E \quad \mathscr{P}(x)) & \iff & \forall x \in E \quad \text{non}\mathscr{P}(x) \end{array}$$

Dans toutes ces assertions x est une variable muette ; la valeur de vérité de $\forall x \in E\ \mathscr{P}(x)$ ne dépend pas de x, on peut utiliser n'importe quel autre nom. Ainsi, $\forall a \in E\ \mathscr{P}(a)$ est la même assertion.

Les quantificateurs doivent être placés avant l'assertion mathématique qu'ils quantifient. Contrairement à ce qui est possible dans une phrase en français, on écrira nécessairement $\forall x \in \mathbb{R}\ \mathscr{P}(x)$, mais on pourra dire « l'assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout réel x ».

L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation au milieu d'une phrase en français est exclu : ils ne doivent figurer que dans une phrase mathématique. Noter également que des écritures comme $\forall x \in \mathbb{R}$ ou $\exists x \in \mathbb{R}$ ne « définissent » x que dans la ligne où ils figurent.

Quand on utilise plusieurs quantificateurs, l'ordre des quantificateurs est très important : le changer modifie la signification de la phrase mathématique.
Exemple : comparer

$$(\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad x + y = 0) \qquad \text{et} \qquad (\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x + y = 0)$$

I.5 Le raisonnement par analyse-synthèse

On utilise ce type de raisonnement lorsqu'on veut démontrer qu'il existe un unique élément x d'un ensemble E qui vérifie une certaine propriété $\mathscr{P}(x)$. La démonstration se fait en deux temps.

- Dans un premier temps, appelé *analyse*, on suppose qu'il existe un élément x dans E tel que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie. On cherche alors à caractériser x et on démontre que nécessairement x est égal à un élément a de E. Ceci prouve l'unicité sous réserve d'existence, puisque si x existe, il est égal à a.
- Dans un deuxième temps, appelé *synthèse*, on vérifie que $\mathscr{P}(a)$ est vraie. Ceci prouve l'existence puisque a est un élément de E et que $\mathscr{P}(a)$ est vraie.

On peut également mener ce type de démonstration pour prouver l'existence sans l'unicité, le principe est le même mais à la fin de l'analyse on ne trouve pas une seule valeur, seulement des renseignements sur les éventuelles solutions du problème.

Exemple : décomposition d'une fonction en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrons qu'il existe un unique couple (φ, ψ) de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que φ soit paire, ψ soit impaire et $f = \varphi + \psi$. On rappelle, en attendant d'y revenir au chapitre 4, qu'une fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite paire lorsque $g(-x) = g(x)$ pour tout réel x et qu'elle est dite impaire lorsque $g(-x) = -g(x)$ pour tout réel x.

- **Analyse (et unicité).** Soit (φ, ψ) un couple de fonctions solution du problème. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \qquad \text{et} \qquad f(-x) = \varphi(-x) + \psi(-x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

  D'où, en faisant la demi-somme et la demi-différence de ces deux égalités,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

  On a démontré à cette étape que le couple (φ, ψ) défini par les formules précédentes est le seul couple solution possible. Ainsi, on a prouvé l'unicité sous réserve d'existence.

- **Synthèse (et existence).** On définit

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \varphi(x)$$

$$\psi(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\psi(x)$$

  Donc φ est paire et ψ est impaire. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) + \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

  Donc $f = \varphi + \psi$. Le couple (φ, ψ) convient. On a ainsi démontré l'existence d'une solution.

On a alors démontré qu'il existe un unique couple de fonctions (φ, ψ) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f = \varphi + \psi$, φ est paire, ψ est impaire.

II Le raisonnement par récurrence

II.1 L'ensemble $\mathbb{N}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$ dont les éléments sont appelés (nombres) entiers naturels. On admet les résultats suivants.

Théorème 0.1. *1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

2. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Notations. On notera souvent $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, si $p \leqslant q$,

$$[\![\, p\,;\, q \,]\!] = \mathbb{N} \cap [\, p\,; q\,]$$

si $p > q$, par convention, on pose :

$$[\![\, p\,;\, q \,]\!] = \varnothing$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note également

$$[\![\, p\,;\, +\infty\, [\![= \mathbb{N} \cap [\, p\,; +\infty\, [$$

II.2 Le théorème de récurrence

Théorème 0.2. *Soient A une partie de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*

$$(I) \qquad n_0 \in A \qquad \text{(initialisation)}$$

$$(H) \qquad \forall n \in [\![\, n_0\,; +\infty\, [\![\qquad n \in A \implies n+1 \in A \qquad \text{(hérédité)}$$

Alors

$$(C) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \implies n \in A \qquad \text{(conclusion)}$$

Démonstration.
Soit B le complémentaire de A dans l'ensemble $[\![\, n_0\,; +\infty\, [\![$:

$$B = \{n \in [\![\, n_0\,; +\infty\, [\![/ \ n \notin A\}$$

Démontrons par l'absurde que B est vide. On suppose donc que B est non vide. Alors, B étant une partie non vide de $\mathbb{N}$, B admet un plus petit élément que l'on note α.

$\alpha \in B$ donc $\alpha \geqslant n_0$ et $\alpha \notin A$. D'après (I), $\alpha \geqslant n_0 + 1 \geqslant 1$, donc $\alpha - 1 \in \mathbb{N}$. α est le plus petit élément de B donc $\alpha - 1 \notin B$. Comme $\alpha - 1 \geqslant n_0$, $\alpha - 1 \in A$. On utilise alors (H) pour en déduire que $\alpha = (\alpha - 1) + 1 \in A$: contradiction avec le fait que $\alpha \in B$. B est donc vide et par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $n \in A$.

□

Corollaire 0.1. *Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $[\![n_0\,;\,+\infty [\![$. On suppose que*

$$(I) \qquad \mathscr{P}(n_0) \text{ est vraie}$$

$$(H) \qquad \forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\qquad \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$$

Alors

$$(C) \qquad \forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\qquad \mathscr{P}(n) \text{ est vraie}$$

Démonstration.
On applique le théorème avec la partie $A = \{n \in \mathbb{N}/\ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie}\}$. □

Corollaire 0.2. Récurrence double
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $[\![n_0\,;\,+\infty [\![$. On suppose que

$$(I) \qquad \mathscr{P}(n_0) \ \textbf{et}\ \mathscr{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \quad \spadesuit$$

$$(H) \qquad \forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\qquad [\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1)] \implies \mathscr{P}(n+2)$$

Alors

$$(C) \qquad \forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\qquad \mathscr{P}(n) \text{ est vraie}$$

Démonstration.
On applique le corollaire 0.1 avec la propriété $\mathscr{Q}$ définie sur $[\![n_0\,;\,+\infty [\![$ par

$$\forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\qquad \mathscr{Q}(n) = [\mathscr{P}(n) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(n+1)]$$

□

De même, on peut faire des récurrences triples ou en général multiples.

Corollaire 0.3. Récurrence forte
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $[\![n_0\,;\,+\infty [\![$. On suppose que

$$(I) \qquad \mathscr{P}(n_0) \text{ est vraie}$$

$$(H) \qquad \forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\qquad [\mathscr{P}(n_0),\ \mathscr{P}(n_0+1), \ldots \text{ et } \mathscr{P}(n)] \implies \mathscr{P}(n+1)$$

Alors

$$(C) \qquad \forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\quad \mathscr{P}(n) \text{ est vraie}$$

Démonstration.
On va appliquer le corollaire 0.1 avec la propriété $\mathscr{R}$ définie sur $[\![n_0\,;\,+\infty [\![$ par

$$\forall n \in [\![n_0\,;\,+\infty [\![\qquad \mathscr{R}(n) = \text{« } \forall k \in [\![n_0\,;\,n]\!]\ \mathscr{P}(k) \text{ »}$$

(I) $\mathscr{R}(n_0) = \mathscr{P}(n_0)$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$. On suppose que $\mathscr{R}(n)$ est vraie. Alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie donc $\mathscr{R}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie. Ainsi, $\mathscr{R}(n)$ implique $\mathscr{R}(n+1)$.

(C) D'après le corollaire 0.1, $\mathscr{R}(n)$ est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à n_0 et par suite $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à n_0. □

Exemples d'application.

1. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}_1(n) : \text{«} \boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}} \text{»}$$

est vraie pour tout entier naturel n. Cette formule sera à connaître.

- **Initialisation**. $\mathscr{P}_1(0)$ est vraie car

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0\,(0+1)}{2}$$

- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}_1(n)$ et montrons $\mathscr{P}_1(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\
&= \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{car } \mathscr{P}_1(n) \text{ est vraie} \\
&= \frac{n\,(n+1) + 2\,(n+1)}{2} \\
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_1(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion**. Par théorème de récurrence, $\mathscr{P}_1(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}_2(n) : \text{«} \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}} \text{»}$$

est vraie pour tout entier naturel n. Cette formule sera à connaître.

- **Initialisation**. $\mathscr{P}_2(0)$ est vraie car

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0\,(0+1)\,(2\times 0+1)}{6}$$