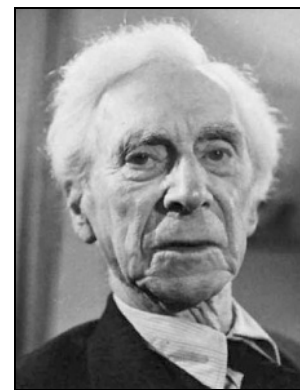


Chapitre 1

Raisonnements mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier \cap et \cup désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note \exists , renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russell
1872-1970

■ ■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.

■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence forte (ou généralisée).
- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.

■ ■ Résumé de cours

■ Les éléments du raisonnement

□ Proposition

Définition 1.1. — On appelle *proposition* toute phrase \mathcal{P} dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x , nous pourrions la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1 — On écrira indifféremment " \mathcal{P} " ou " \mathcal{P} est vraie".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, " $\ln(x) > 0$ " est une proposition dépendante de la variable x . Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — "*La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante*" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier n .

Exemple 1.3. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.4. — Pour tout réel x , " $(2x + 1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

□ Quantificateurs

Notation — Le signe " \forall " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x ...*".

Le signe " \exists " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x ...*".

Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique x ...*".

" $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ " se lit : "*quel que soit le réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif*" ou "*pour tout réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif*".

" $\exists x \in]0, +\infty[, x^2 - 6x + 1 = 0$ " se lit : "*il existe au moins un réel x strictement positif tel que $x^2 - 6x + 1$ est égal à 0*" (il y a d'ailleurs deux tels x : $3 + 2\sqrt{2}$ et $3 - 2\sqrt{2}$).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(n+1)}{2} = 3$ " se lit : "*il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\frac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3*" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x* " signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x, y))$ est différente de $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x, y))$.

Exemple 1.5. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$ " énonce que, quel que soit le réel x , il existe un entier n , tel que x soit compris entre n et $n + 1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de x). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n + 1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression " $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \dots$ ", il faut noter que x dépend de y , on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

□ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de \mathcal{P} , notée $\text{non } \mathcal{P}$ et appelée *négation* de \mathcal{P} , est la proposition qui est vraie lorsque \mathcal{P} est fausse et qui est fausse lorsque \mathcal{P} est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non } \mathcal{P}(x))$.

La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non } \mathcal{P}(x))$.

Exemples 1.6. — • Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "les trois numéros obtenus sont pairs" est "au moins un des numéros obtenus est impair".

• La négation de " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " est :

" $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$ ou $x \geq n+1$ "

La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

Définition 1.3. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On appelle *disjonction* de \mathcal{P} et \mathcal{Q} la proposition $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$, le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit \mathcal{P} , soit \mathcal{Q} , soit les deux).

Exemple 1.7. — Pour un dé lancé, on considère \mathcal{P} : "le numéro sorti est pair", et \mathcal{Q} : "le numéro sorti est supérieur ou égal à 3". Alors, $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$ est : "le numéro sorti est 2, 3, 4, 5 ou 6".

Définition 1.4. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On appelle *conjonction* de \mathcal{P} et \mathcal{Q} la proposition $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ (les deux simultanément).

Exemple 1.8. — En reprenant l'**exemple 1.7**, $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ est : "le numéro sorti est 4 ou 6".

Définition 1.5. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On dit que \mathcal{P} *implique* \mathcal{Q} , et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si \mathcal{P} est vraie, alors \mathcal{Q} est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Vocabulaire — Lorsque \mathcal{P} implique \mathcal{Q} , on dit que \mathcal{P} est une condition suffisante de \mathcal{Q} , et que \mathcal{Q} est une condition nécessaire de \mathcal{P} .

⇒ **Méthode 1.1.** Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?

⇒ **Méthode 1.2.** Comment établir une inégalité quelconque ?

⇒ **Méthode 1.3.** Comment montrer une proposition par implication ?

Exemple 1.9. — Pour tout réel x , on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On dit que \mathcal{P} *équivalent* à \mathcal{Q} (ou que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire — Lorsque \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont équivalentes, on dit que \mathcal{P} est vraie si, et seulement si, \mathcal{Q} est vraie. On dit aussi que \mathcal{P} est une *condition nécessaire et suffisante* de \mathcal{Q} .

⇒ **Méthode 1.5.** Comment montrer une équivalence par double implication ?

Exemple 1.10. — $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (\ln a < \ln b) \Leftrightarrow (a < b)$.

Exemple 1.11. — Pour tout entier n , n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

□ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.1. — Quelles que soient les propositions \mathcal{P} et \mathcal{Q} , pour montrer que \mathcal{P} implique \mathcal{Q} , on suppose que \mathcal{P} est vraie, que \mathcal{Q} est fausse, et on montre que c'est impossible.

⇒ **Méthode 1.4.** Comment montrer une proposition par l'absurde ?

□ Démonstration par récurrence

Récurrence simple

Théorème 1.2. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n . Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 .

⇒ **Méthode 1.6.** Comment montrer une proposition par récurrence ?

Vocabulaire. — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie})$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n , et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Remarque 1.4. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Récurrence d'ordre p (avec $p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

Théorème 1.3. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n . Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies et si, en supposant les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \dots, \mathcal{P}(n+p-1)$ vraies, pour un certain entier naturel n de \mathbb{N} , on montre que $\mathcal{P}(n+p)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de \mathbb{N} .

⇒ **Méthode 1.7.** Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?

Réurrence forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au $n^{\text{ème}}$ (et non pas seulement au $n^{\text{ème}}$), pour en montrer la vérité au rang $(n+1)$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.4. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n . Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si, pour un certain entier naturel n , en supposant les propositions $\mathcal{P}(k)$ vraies pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier naturel n .

⇒ Un exemple de démonstration par récurrence forte sera donné au chapitre 2

Remarque 1.5. — On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier n donné, on a besoin de la vérité de $\mathcal{P}(n)$ et de $\mathcal{P}(n+1)$ pour établir celle de $\mathcal{P}(n+2)$. La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire $\mathcal{P}(1)$ de $\mathcal{P}(0)$: il faut $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ pour obtenir $\mathcal{P}(2)$, puis enclencher la récurrence.

■ ■ Méthodes

■ Comparaison d'expressions

□ Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?

Si une fonction f est monotone sur un ensemble I , et si x et y appartiennent à I , alors comparer x et y suffit pour comparer $f(x)$ et $f(y)$.

Plus précisément :

- Si f est croissante sur I , alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- Si f est décroissante sur I , alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Remarque : si l'on veut établir des équivalences au lieu d'implications, il faut signaler en plus la bijectivité de f (ce qui établit l'implication réciproque grâce aux variations de f^{-1} qui sont les mêmes que celles de f).

⇒ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \quad (\text{nous noterons cette inégalité } (I))$$

Remarque importante de présentation — Nous allons commencer par une analyse qui se fait au brouillon, ou même, avec un peu d'habitude, mentalement. Nous proposerons une rédaction "au propre" dans un second temps.

Au brouillon :

- Compte tenu des règles sur les exposants, (I) s'écrit : $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.
- Puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , et puisque les deux membres de l'inégalité sont positifs (car $n \geq 2$), alors cette dernière inégalité équivaut à la suivante :

$$1 - \frac{2}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

- Mais, en développant le membre de droite, nous nous rendons compte que cette inégalité est évidente. En effet, elle s'écrit : $1 - \frac{2}{n} \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire : $0 \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui est vrai.

Sur la copie :

Il suffit de "partir" de la fin du raisonnement au brouillon :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 1 - \frac{2}{n} \quad (\text{car } \frac{1}{n^2} \geq 0) \quad \text{donc : } 1 - \frac{2}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et chaque membre est positif (car $n \geq 2$)

$$\text{donc : } \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right]^n.$$

$$\text{Cette inégalité s'écrit bien : } \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

□ Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?

Si l'inégalité que l'on se propose de prouver ne peut pas se mettre sous la forme étudiée à la **méthode 1.1**, alors en "passant tout" dans un même membre, on se ramène à prouver qu'une expression est positive (ou négative, selon les cas). Il sera par exemple possible, mais non obligatoire (voir ci-dessous), d'étudier les variations de la fonction définie par cette expression.

⇒ Exercice 1.4

Exemple 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq 2\sqrt{x} - 1$.

Pour tout réel x positif, on a la chance de constater que : $x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$.

Comme un carré est positif, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq 2\sqrt{x} - 1$.

Exemple 2. Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

On pose $f(x) = x - \ln(1+x)$ et on étudie la fonction f sur $]-1, +\infty[$.

Cette fonction est bien sûr dérivable et on a : $\forall x \in]-1, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

Comme $1+x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x , ce qui prouve que f décroît sur $]-1, 0[$ et croît sur $]0, +\infty[$. Elle est donc minimale pour $x = 0$.

On a alors : $\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) \geq f(0)$. Comme $f(0) = 0$ on obtient : $x - \ln(1+x) \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.