

# I Rappels préliminaires

La méthode des éléments finis telle qu'elle sera abordée et présentée dans ce livre peut être définie comme une technique d'approximation permettant de résoudre, de manière approchée, des problèmes de mécanique des milieux continus. En ce sens, il convient ici de faire quelques rappels à propos de ce domaine spécifique, néanmoins largement répandu dans notre environnement scientifique et technique. Ces rappels se limitent à l'utilisation des méthodes énergétiques de calcul de structures et plus particulièrement du principe du minimum de l'énergie potentielle, très largement utilisé dans les codes de calcul par éléments finis. Les fondements de ce principe seront présentés de manière conceptuelle, théorique et numérique.

## 1 Présentation du problème physique

Il est à rappeler que le contexte mécanique de ce livre a pour vocation essentielle d'initier à la résolution de problèmes bidimensionnels de mécanique des milieux continus. Il est important de noter que, même s'il est possible de bien poser n'importe quel problème de mécanique classique, il n'est pas possible, de façon générale, de trouver une solution analytique à ce type de problème. Dans ce contexte, la méthode des éléments finis constitue alors une technique de résolution approchée qui permet d'obtenir une approximation de la solution exacte. Les données relatives au calcul d'une structure sont de trois types :

1. la géométrie de la structure ( $S$ ) ;
2. les caractéristiques mécaniques intrinsèques du (ou des) matériau(x) constituant cette structure ;

3. les conditions aux limites, qui constituent d'une part le chargement auquel la structure est soumise, appliquées sur la frontière  $S_F$  (conditions aux limites en forces), et d'autre part les blocages de cette structure, appliqués sur la frontière  $S_U$  (conditions aux limites en déplacements), comme cela est montré sur la figure I.1. On notera que  $S = S_F \cup S_U$ .

Afin de construire une solution approchée à partir de ces données, il faut définir avant tout ce que l'on entend par solution. On définit une solution d'un calcul de structure comme étant la connaissance *en tout point* de la structure du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  de Cauchy, des déformations  $\varepsilon_{ij}$  et des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ .

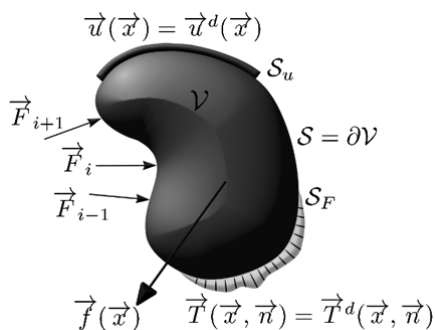


FIGURE I.1 – Problème de mécanique des milieux continus

Plus particulièrement, l'inconnue du problème de mécanique, schématisé sur la figure I.1, est  $\underline{u}(\underline{x})$ , le champ de déplacement avec  $\underline{x} \in V$ , avec  $V$ , le volume de la structure. C'est lui qui est recherché en dernier lieu, de façon exacte ou approchée. A noter aussi qu'il est possible de mettre en place des éléments finis pour lesquels la résolution se fait en contraintes. Dans ce cas, l'inconnue du problème devient  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ , le tenseur des contraintes. Ce cas n'est pas traité dans le cadre de cet ouvrage.

Les inconnues secondaires, c'est-à-dire les données qui sont introduites dans le problème afin de trouver une formulation permettant de le résoudre et qui pourront être déterminées une fois que  $\underline{u}(\underline{x})$  sera connu, sont :

- $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  le tenseur des déformations ;
- $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  le tenseur des contraintes ;
- $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$  le vecteur des contraintes sur les bords du système, avec  $\underline{x} \in S$  et  $\underline{n}$  la normale à la facette d'étude.

A ce titre, l'équation I.1 représente la relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le vecteur des contraintes, tous deux introduits précédemment.

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} \quad (\text{I.1})$$

Cette équation est obtenue en égalisant la projection des contraintes de Cauchy sur la surface extérieure et le vecteur des contraintes appliquées sur cette même surface. Cette projection est décrite, dans ce qui suit, afin de fixer la notation et le sens des différentes composantes du champ de contraintes au voisinage des conditions aux limites.

Soit un élément de volume élémentaire  $dV$  comme représenté sur la figure I.2. Cet élément de volume est soumis à l'action directe de l'extérieur sur lui-même au niveau de ses faces  $dS$ ,  $dS_1$ ,  $dS_2$  et  $dS_3$ , respectivement  $d\underline{F}$ ,  $d\underline{F}_1$ ,  $d\underline{F}_2$  et  $d\underline{F}_3$ . Il subit également une force volumique  $\underline{f}$  due par exemple à la pesanteur et une force volumique d'inertie  $\rho\underline{\gamma}$  où  $\rho$  est la densité de la matière le constituant et  $\underline{\gamma}$  son accélération.

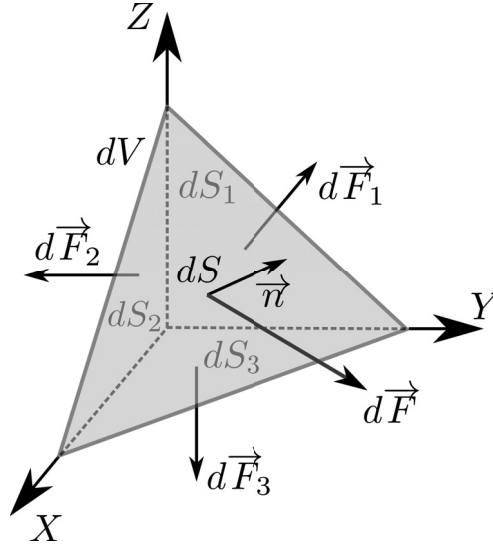


FIGURE I.2 – Élément de volume infinitésimal

On suppose maintenant que les forces élémentaires de l'extérieur sur le système sont proportionnelles à la face à laquelle elles sont attachées de la façon suivante :  $d\underline{F} = \underline{T}dS$ ,  $d\underline{F}_i = -\underline{Q}_i dS_i \forall i \in [[1, 3]]$ . Considérant ces actions, il est alors possible d'écrire l'équation fondamentale de la mécanique, c'est-

à-dire que la somme des forces agissant sur le solide est égale à sa masse multipliée par son accélération :

$$(\underline{f} - \rho\underline{\gamma}) \cdot dV + \underline{T}dS - (\underline{\Theta}_1 dS_1 + \underline{\Theta}_2 dS_2 + \underline{\Theta}_3 dS_3) = 0 \quad (\text{I.2})$$

En divisant par  $dS$  et en introduisant les cosinus directeurs de  $\underline{n}$  ( $n_i = \frac{dS_i}{dS}$   $\forall i \in [[1, 3]]$ ), il vient :

$$(\underline{f} - \rho\underline{\gamma}) \cdot \frac{dV}{dS} + \underline{T} - (\underline{\Theta}_1 n_1 + \underline{\Theta}_2 n_2 + \underline{\Theta}_3 n_3) = 0 \quad (\text{I.3})$$

Faisons maintenant tendre le volume du solide vers 0, c'est-à-dire,  $\frac{dV}{dS} \rightarrow 0$  :

$$\underline{T} = \underbrace{[\underline{\Theta}_1 \quad \underline{\Theta}_2 \quad \underline{\Theta}_3]}_{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{n} \quad (\text{I.4})$$

Ainsi, la tension agissant sur un élément de surface dépend de l'orientation de cette surface. Les composantes  $\underline{\Theta}_1, \underline{\Theta}_2, \underline{\Theta}_3$  représentent les vecteurs du champ de contraintes sur chaque facette avec  $\underline{\Theta}_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ ,  $\underline{\Theta}_2(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$ ,  $\underline{\Theta}_3(\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$ .

La résolution du problème schématisé sur la figure I.1 se fait à partir de la connaissance des données d'entrée bien spécifiques aux problèmes de mécanique des milieux continus. Ces dernières, représentées schématiquement sur la figure I.1, sont au nombre de six. Elles sont énumérées ci-après et regroupées selon trois types :

1. Données géométriques :
  - (a) le volume  $V$  et sa frontière fermée  $S = \partial V$  représentent la géométrie du système ;
2. Données matérielles :
  - (a) les couples de paramètres  $(E, \nu)$  ou  $(\lambda, \mu)$  qui, au travers de la loi de comportement, constituent les caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs du système. Ce sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson, et les coefficients de Lamé ;
3. Données relatives aux conditions aux limites :

- (a) les forces ponctuelles extérieures,  $\{\underline{F}_i\}_{i \in [1, n]}$  qui sont des conditions aux limites en effort appliquées sur le système aux points  $\{x_i\}_{i \in [1, n]}$  ;
- (b) les forces volumiques extérieures,  $\underline{f}(\underline{x})$  avec  $\underline{x} \in V$ , qui sont aussi des conditions aux limites en effort ;
- (c) les forces surfaciques connues à la frontière du système,  $\underline{T}^d(\underline{x}, \underline{n}^d)$  avec  $\underline{x} \in S_F \subset \partial S$ , qui sont encore des conditions aux limites en effort. Il est à noter que  $\underline{n}$  dépend de la position  $\underline{x}$  puisqu'il s'agit de la normale sortant au bord du volume ;
- (d) les déplacements aux frontières connus  $\underline{u}^d(\underline{x})$  avec  $\underline{x} \in S_u \subset \partial S$  qui sont, eux, des conditions aux limites en déplacement.

Il est à signaler ici que pour tout point du système, c'est-à-dire  $\underline{x} \in V$ , les déplacements et les efforts en ce point ne sont pas initialement connus simultanément. Leur connaissance simultanée sera obtenue après avoir résolu le problème considéré.

## 2 Equations de la mécanique des milieux continus

Après avoir précisé dans le paragraphe 1, les différentes quantités qui décrivent un problème bien posé ( $\underline{u}(\underline{x}), \underline{\varepsilon}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x}), V, (E, \nu), \{\underline{F}_i\}_{i \in [1, n]}, \underline{f}(\underline{x}), \underline{T}^d(\underline{x}, \underline{n}^d)$  et  $\underline{u}^d(\underline{x})$ ), il faut maintenant construire le problème de mécanique. Cette tâche est réalisée en considérant trois types d'équations qui vont relier ces quantités ensemble, les unes avec les autres. Il est à noter que chacune de ces équations découle des spécificités de la modélisation faite du problème physique. Dans ce qui suit, une liste de ces spécificités est énoncée avec les équations qui lui sont associées. Pour un développement plus complet des équations de la mécanique des milieux continus, la référence [5] peut être consultée.

### 2.1 Equations d'équilibre

On se place dans un cas statique ou du moins quasi-statique, c'est-à-dire que le problème est indépendant du temps. A tout instant, le système est ainsi supposé être à l'équilibre. On suppose également, être dans le cas où

le matériau constitutif est parfaitement isotrope. De cette hypothèse fondamentale et finalement assez peu restrictive, on écrit via l'équation I.5, à l'échelle locale, un équivalent qui impose qu'en régime statique les sommes des forces et des moments sur le système soient nulles. Cela correspond aux équations d'équilibre d'un élément de volume.

1. La somme des forces est nulle :

(a) en notation vectorielle

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) + \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (\text{I.5})$$

(b) en notation indicielle

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (\text{I.6})$$

2. La somme des moments est nulle :

(a) en notation vectorielle

$${}^t\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{I.7})$$

(b) en notation indicielle

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{I.8})$$

Il en découle que le tenseur des contraintes ( $\underline{\underline{\sigma}}$ ) doit être symétrique. Dans un espace à trois dimensions, l'équation I.5 s'écrit de façon développée comme suit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (\text{I.9})$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (\text{I.10})$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (\text{I.11})$$

ou en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0 \quad (\text{I.14})$$

La démonstration géométrique suivante des équations I.5 et I.7 servira à bien clarifier la notation des contraintes. L'équation d'équilibre vient directement de la nullité de la somme des forces à l'échelle microscopique. Soit donc l'élément de volume élémentaire représenté à la figure I.3 de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  dont le point central est à la coordonnée  $\underline{x} = (x, y, z)$ . Il est appliqué une force volumique  $\underline{f}$  sur ce volume. La nullité de la somme des forces dans la direction  $x$  s'écrit :

$$\sigma_{11} \left( x + \frac{dx}{2}, y, z \right) dy \cdot dz - \sigma_{11} \left( x - \frac{dx}{2}, y, z \right) dy \cdot dz \quad (\text{I.15})$$

$$+ \sigma_{12} \left( x, y + \frac{dy}{2}, z \right) dx \cdot dz - \sigma_{12} \left( x, y - \frac{dy}{2}, z \right) dx \cdot dz \quad (\text{I.16})$$

$$+ \sigma_{13} \left( x, y, z + \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy - \sigma_{13} \left( x, y, z - \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy + f_1 dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (\text{I.17})$$

En réorganisant :

$$\frac{1}{dx} \left( \sigma_{11}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}(\underline{x}) \frac{dx}{2} - \sigma_{11}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}(\underline{x}) \frac{dx}{2} \right) \quad (\text{I.18})$$

$$+ \frac{1}{dy} \left( \sigma_{12}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}(\underline{x}) \frac{dy}{2} - \sigma_{12}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}(\underline{x}) \frac{dy}{2} \right) \quad (\text{I.19})$$

$$+ \frac{1}{dz} \left( \sigma_{13}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}(\underline{x}) \frac{dz}{2} - \sigma_{13}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}(\underline{x}) \frac{dz}{2} \right) + f_1 = 0 \quad (\text{I.20})$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + f_1 = 0 \quad (\text{I.21})$$

En opérant de même pour les directions  $y$  et  $z$ , on déduit l'équation I.5.

Quant à l'équation I.7, il s'agira d'une démonstration géométrique de la symétrie du tenseur des contraintes. Il est cependant possible de trouver dans la littérature des démonstrations plus « élégantes » mais elles demandent une approche plus mathématique. Soit l'élément de volume représenté sur la figure I.3 de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  dont le point central est à la coordonnée

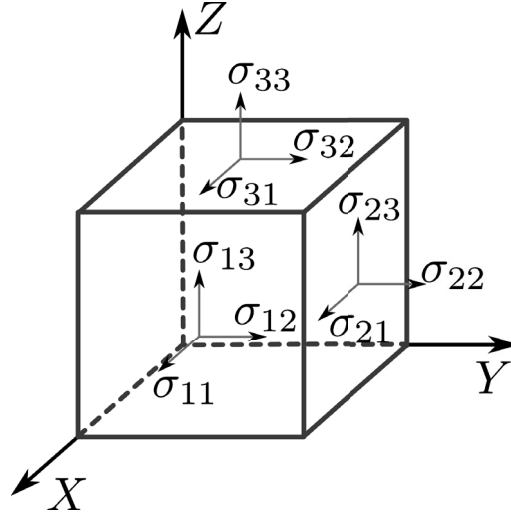


FIGURE I.3 – Représentation géométrique des contraintes sur un élément de volume

$\underline{x} = (x, y, z)$ . On écrira la nullité de la somme des moments autour de ce point autour de l'axe  $x$ , le calcul étant complètement équivalent dans les autres directions de l'espace :

$$\sigma_{23} \left( x, y + \frac{dy}{2}, z \right) dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - \sigma_{32} \left( x, y, z + \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} \quad (\text{I.22})$$

$$- \sigma_{32} \left( x, y, z - \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} + \sigma_{23} \left( x, y - \frac{dy}{2}, z \right) dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0 \quad (\text{I.23})$$

Il vient :

$$\sigma_{23}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y}(\underline{x}) \frac{dy}{2} + \sigma_{23}(\underline{x}) - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y}(\underline{x}) \frac{dy}{2} \quad (\text{I.24})$$

$$- \left( \sigma_{32}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z}(\underline{x}) \frac{dz}{2} \right) - \left( \sigma_{32}(\underline{x}) - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z}(\underline{x}) \frac{dz}{2} \right) = 0 \quad (\text{I.25})$$

Enfin :