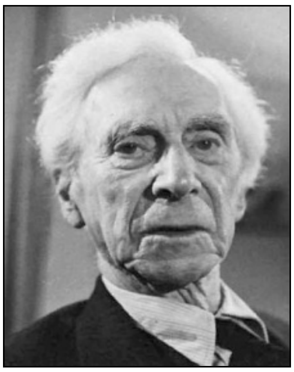
Chapitre 1
Raisonnements mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier $\cap$ et $\cup$ désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note $\exists$, renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russell
1872-1970

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.
- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence forte (ou généralisée).
- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir raisonner par contraposée.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.
- ▷ Savoir écrire la négation d’une proposition.

Résumé de cours

Les éléments du raisonnement

Proposition

Définition 1.1. — On appelle *proposition* toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable *x*, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1 — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel *x* strictement positif, "$\ln(x) > 0$" est une proposition dépendante de la variable *x*. Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — "*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier *n*.

Exemple 1.3. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.4. — Pour tout réel *x*, " $(2x+1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

Quantificateurs

Notation — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable *x* signifie "*quel que soit x...*".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable *x* signifie "*il existe (au moins) un x...*".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable *x* signifie "*il existe un unique x...*".

" $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ " se lit : "quel que soit le réel *x*, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel *x*, x^2+1 est strictement positif".

" $\exists x \in\ ]0,+\infty[,\ x^2-6x+1=0$ " se lit : "il existe au moins un réel *x* strictement positif tel que x^2-6x+1 est égal à 0" (il y a d'ailleurs deux tels *x* : $3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ " se lit : "il existe un unique entier naturel *n* non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y))$ est différente de $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x,y))$.

Exemple 1.5. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \le x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel *x*, il existe un entier *n*, tel que *x* soit compris entre *n* et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de *x*). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \le x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression "$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \ldots$", il faut noter que x dépend de y, on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.

Exemples 1.6. — • Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".

• La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$" est :

"$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$ ou $x \geq n+1$"

La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la *partie entière* de x (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).

Exemple 1.7. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 2,3,4,5 *ou* 6".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).

Exemple 1.8. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Vocabulaire. — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

Exemple 1.9. — Pour tout réel x, on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire. — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* de $\mathcal{Q}$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer une équivalence par double implication ?**

Exemple 1.10. — $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ (\ln a < \ln b) \Leftrightarrow (a < b)$.

Exemple 1.11. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ La contraposition

Définition 1.7. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication $(\text{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\,\mathcal{P})$ s'appelle la *contraposée* de l'implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exemple 1.12. — La contraposée de la proposition "*s'il pleut, alors le sol est mouillé*" est "*si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas*".

Théorème 1.1. — Une implication et sa contraposée sont équivalentes : montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ revient à montrer que si $\mathcal{Q}$ n'est pas vraie, alors $\mathcal{P}$ n'est pas vraie.

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\,\mathcal{P})$$

Remarque 1.4. — L'**exercice 1.4** (question **1**) propose un exemple de raisonnement par contraposition.

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.2. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, que $\mathcal{Q}$ est fausse, et on montre que c'est impossible.

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \big((\mathcal{P} \text{ et non}\,\mathcal{Q}) \text{ est fausse}\big)$$

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

Remarque 1.5. — L'idée de la démonstration par l'absurde est très simple : pour montrer que $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse, puis on cherche à établir une contradiction.

❑ Démonstration par récurrence

Récurrence simple

Théorème 1.3. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.

Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

Vocabulaire. — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie})$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Remarque 1.6. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Récurrence finie

Il se peut qu'on ait à montrer qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, non pas pour tout entier naturel n, mais pour un nombre fini d'entiers successifs, mettons de l'entier n_1 à l'entier n_2, où $n_1 < n_2$. On a alors la version suivante :

> **Théorème 1.4.** — Si $\mathcal{P}(n_1)$ est vraie et si, pour tout entier n de $[\![n_1, n_2 - 1]\!]$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $[\![n_1, n_2]\!]$.

Récurrence d'ordre *p* (avec $p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

> **Théorème 1.5.** — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
> Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies et si, en supposant les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \ldots, \mathcal{P}(n+p-1)$ vraies, pour un certain entier naturel n de $\mathbb{N}$, on montre que $\mathcal{P}(n+p)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $\mathbb{N}$.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?**

Récurrence forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au $n^{\text{ème}}$ (et non pas seulement au $n^{\text{ème}}$), pour en montrer la vérité au rang $(n+1)$. On a alors le résultat suivant :

> **Théorème 1.6.** — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
> Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si, pour un certain entier naturel n, en supposant les propositions $\mathcal{P}(k)$ vraies pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier naturel n.

⇨ **Un exemple de démonstration par récurrence forte sera donné au chapitre 2**

Remarque 1.7. — On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier n donné, on a besoin de la vérité de $\mathcal{P}(n)$ et de $\mathcal{P}(n+1)$ pour établir celle de $\mathcal{P}(n+2)$. La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire $\mathcal{P}(1)$ de $\mathcal{P}(0)$: il faut $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ pour obtenir $\mathcal{P}(2)$, puis enclencher la récurrence.

■■ Méthodes

■ Raisonnements

❑ Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire alors une contradiction.

⇨ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que pour tout nombre réel x différent de –3, on a : $\dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\dfrac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x+1 = x+3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3,\ \dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

❑ Méthode 1.2. Comment montrer une équivalence par double implication ?

L'équivalence $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$ signifie la double implication : $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$.

⇨ Exercice 1.3

Remarque — On privilégiera cette méthode lorsque les arguments permettant d'établir l'une des deux implications sont différents de ceux permettant d'établir l'autre.

Exemple. Soit deux réels a et b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N},\ \ a2^n + b3^n = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$.

Commençons par noter que, si $a = b = 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a bien $a\,2^n + b\,3^n = 0$.

Établissons l'autre implication :

Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$a2^n + b3^n = 0$, alors $\begin{cases} a2^0 + b3^0 = 0 \\ a2^1 + b3^1 = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l}\text{si l'égalité est vraie pour tout } n \text{ alors elle} \\ \text{l'est en particulier pour } n = 0 \text{ et } n = 1\end{array}\right)$.

Ce système s'écrit $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$ et on en déduit $\begin{cases} b = -a \\ 2a - 3a = 0 \end{cases}$, puis : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Ceci prouve la seconde implication, et finalement l'équivalence.

Méthodes

Remarque — Le fait de choisir deux valeurs de n pour trouver a et b n'est pas une hérésie puisque a et b sont des constantes (indépendantes de n). Si a et b étaient des fonctions de n, tout ceci serait inacceptable.

■ Récurrences

❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par récurrence sur l'entier naturel *n* ?

> n_0 est ici un entier naturel fixé.
> On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.
> - Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
> - Hérédité : on considère que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n supérieur ou égal à n_0. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
> - Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6, 1.7, 1.9**

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

On commence par noter, pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 1$".

• Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie par choix de u_0.

• Hérédité : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie (c'est-à-dire $u_n = 1$) pour un entier naturel n fixé.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{3\times 1 - 2}{1} = 3 - 2 = 1$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 sur l'entier naturel *n* ?

> On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.
> - Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.
> - Hérédité : on considère un entier n fixé, supérieur ou égal à n_0, tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Grâce à $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
> - Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercice 1.8**