Sujet 2015

Exercice 1 ....

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1) Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de I_1.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

5) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

b) Calculer J_0.

6) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $0 \le J_n \le \frac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

7) À l'aide des questions 4a) et 6a), compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour n ($n \ge 2$) entré par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure ou égale à 2 :')
I = log(2)
J = 1/2
J = ------
for k = 2:n
I = ------
J = ------
end
disp(I, 'la valeur de I est :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

1) a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que : $\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$

b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3) a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.

b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4) Écrire une commande `Scilab` permettant de simuler la variable aléatoire Z.

5) On considère les commandes `Scilab` suivantes :

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
w = grand(1,n,'exp',1)
s = sum(w.*sqrt(w))/n/sqrt(%pi)
```

a) En remarquant que $x^2 g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$, montrer que s contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

b) On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 3 ....

On considère l' espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire canonique des vecteurs x et y.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1) Justifier l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$, formée de vecteurs propres de f.

2) a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$.

b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x) \rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.

c) En déduire que l'application φ, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) En utilisant $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.

b) Établir que g est bijectif.

c) Montrer que la famille $(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), ..., g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

Problème ....

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

2) a) Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{r+2} x^n$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_n \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3) Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.

a) Donner la valeur de S_0.

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

c) En déduire :

$$\forall x \in]0,1[,\ \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

d) Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On note α et p deux réels de $]0,1[$.

Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $1-p$. Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié et on suppose que les manches jouées sont jouées de façon indépendante.

On note :

- X le nombre de manches auxquelles a participé ce joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par ce joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Donner la loi de X (on pourra noter D_k l'événement « le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »).

b) On pose $T = X+1$. Reconnaître la loi de la variable T puis en déduire que l'on a : $E(X) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.

c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

2) a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X=n)$.

b) En déduire, à l'aide de la partie 1, la loi de Y.

3) Calculer l'espérance de Y puis montrer que $V(Y) = \dfrac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

4) a) Exprimer G en fonction de X et Y.

b) En déduire l'espérance de G.

c) On admet l'existence de $E(XY)$. Établir que $E(XY) = \dfrac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}$.

d) En déduire la variance de G.

5) a) Compléter, en utilisant la fonction `grand`, les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```
alpha = input('entrez la valeur de alpha :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = ------
Y = ------
disp(X)
disp(Y)
```

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour que la valeur prise par G soit calculée et affichée ?

Conseils 2015

Exercice 1 ....

❖ **Conseils de méthode**

1) Comme le calcul de I_n n'est pas demandé, il est bien d'utiliser un des critères de convergence d'une intégrale impropre.

2) a) Classique ! On réduit $\frac{a}{x}-\frac{b}{x+1}$ au même dénominateur et on identifie les coefficients du numérateur avec le polynôme $0x+1$.

b) Pas de bêtise (voir les « fautes à ne pas faire » ! Il faut d'abord calculer $\int_1^A \frac{dx}{x(x+1)}$, c'est-à-dire $\int_1^A \frac{dx}{x}-\int_1^A \frac{dx}{x+1}$, puis prendre la limite du résultat lorsque A tend vers $+\infty$.

3) a) On peut avoir l'idée de minorer $x+1$, ce qui permettra d'obtenir l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ que l'on sait calculer.

b) C'est le théorème d'encadrement qui permet de conclure.

4) a) Écrire I_n+I_{n+1} sous forme d'une seule intégrale puis réduire au même dénominateur la fonction intégrée.

b) Il est pratique de calculer $I_{n+1}-I_n$ et d'établir que c'est négatif.

c) La décroissance de la suite (I_n) permet d'écrire $I_n \geq I_{n+1}$, puis $2I_n \geq I_n+I_{n+1}$ et on peut obtenir une minoration de I_n grâce à la question 4a).

5) a) Utiliser la même stratégie qu'à la question 1).

6) a) Même chose qu'à la question 4a), il faut écrire J_k+J_{k-1} sous forme d'une seule intégrale puis réduire au même dénominateur la fonction intégrée.

b) Il faut réécrire la somme $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$ sous forme "télescopique" grâce à la question précédente.

c) On peut minorer $(x+1)^2$ pour majorer J_n ou seulement minorer $x+1$ afin de se raccrocher à I_n.

d) La seule façon simple de prouver qu'une série converge tout en donnant sa somme est de calculer ses sommes partielles, il faut donc utiliser la question 6b).

7) Il faut utiliser les relations $J_1 = I_1 - J_0$, $I_k = \dfrac{1}{k-1} - I_{k-1}$ et $J_k = I_k - J_{k-1}$.

❖ Conseils de rédaction

1) Il faut penser à citer la continuité de $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ sur $[1, +\infty[$.

3) a) Ayant $x^n(x+1) \geq 2x^n$, il faut citer la décroissance de la fonction inverse sur $[2, +\infty[$ pour majorer rigoureusement $\dfrac{1}{x^n(x+1)}$. Ne pas oublier non plus, de citer l'ordre des bornes pour intégrer des inégalités. Enfin, il est bien signaler que $n \geq 2$ pour pouvoir écrire $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{1}{A^{n-1}} = 0$ (tester avec $n = 1$ ou $n = 0$ pour se convaincre).

4) a) Ne pas oublier de citer la linéarité de l'intégration.
b) Ici aussi, citer la linéarité de l'intégration.

5) b) Il faut absolument passer par le calcul d'une intégrale partielle.

6) a) Encore une fois, il faut citer la linéarité de l'intégration.
c) Comme à la question 3a), penser à citer les propriétés permettant de manipuler les inégalités correctement.
7) Essayer le plus possible de justifier les décisions prises.

❖ Aide à la résolution

1) Utiliser l'équivalent $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

2) b) Pour le passage à la limite, écrire :

$$\ln A - \ln(A+1) = \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{A+1}\right)$$

3) a) Pour tout x supérieur ou égal à 1, on a : $x + 1 \geq 2$.

4) c) Ayant établi, avec les questions 3a), 4a) et 4b) que $\dfrac{1}{2n} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$, il reste à encadrer $2nI_n$ pour trouver un équivalent de I_n.

6) b) Il faut écrire $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_k + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_{k-1}$ puis faire un changement d'indice dans la deuxième somme.

c) Pour tout x supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$ … Ou bien on a établi : $0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \frac{1}{2x^n(x+1)}$ afin de se raccrocher à I_n.

d) Ayant écrit $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = (-1)^{n-1}J_n + \frac{1}{2}$, considérer $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k - \frac{1}{2}\right|$ de façon à se "débarrasser" de la quantité $(-1)^{n-1}$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) La faute qui fait mal : $x^n(x+1) = x^{n+1}+1$.

Une faute plus subtile consiste à écrire $\frac{1}{x^n(x+1)} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^n}\right)$, ce qui est bien, mais malheureusement l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ ne converge pas dans le cas où $n=1$.

2) b) L'énormité : $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+1}$!!! L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ existe, mais aucune des deux intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+1}$ n'existe.

Guère mieux : trouver $\int_1^{A}\frac{dx}{x(x+1)} = \ln A - \ln(A+1) + \ln 2$ est excellent, mais conclure en écrivant $\lim_{A\to+\infty}\ln A = 0$ et $\lim_{A\to+\infty}\ln(A+1) = 0$ est abasourdissant. Moins grave mais tout aussi faux consiste à écrire : « $\lim_{A\to+\infty}(\ln A - \ln(A+1)) = 0$ car $\ln A \underset{+\infty}{\sim} \ln(A+1)$ ». On peut avoir $f(x) \underset{+\infty}{\sim} f(x+1)$ sans pour autant avoir $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - f(x+1)) = 0$: prendre par exemple $f(x) = x$.

L'intégrale $\int_1^{A}\frac{dx}{x(x+1)}$ n'est pas égale à I_1 (à cause de la borne A).

3) a) Avoir écrit $x^n(x+1) \geq 2x^n$ est bien, en déduire $\frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}$ est très bien, encore fallait-il donner la bonne raison ! Se contenter de signaler que $x \neq 0$ et $x \neq -1$ ne suffit pas.

Quant à écrire que la fonction inverse est décroissante (sans aucune indication d'intervalle), c'est un peu fâcheux.

4) a) : Écrire $\int_1^{A}\frac{dx}{(x+1)^{n+1}} = \left[\frac{1}{(n+2)x^{n+2}}\right]_1^A$ est une énorme étourderie (ou pire…).