

# CHAPITRE 1

## RAPPELS SUR LA TRANSFORMÉE EN 'Z'

### 1. PREAMBULE

Avant le développement des moyens de calcul numérique pour commander les procédés industriels, les commandes étaient développées par des circuits analogiques tels les amplificateurs industriels. Dans ce contexte technologique la transformée de Laplace était le support de représentation permettant l'étude des correcteurs assurant les performances dynamiques souhaitées par l'utilisateur tout en garantissant la stabilité des systèmes asservis.

Aujourd'hui, le développement considérable des circuits de calcul, tels les DSP (Digital Signal Processing), les microcontrôleurs, et les circuits de calculs dédiés, autorise un traitement numérique de la commande.

Dans cet environnement, les grandeurs de mesures sont acquises à une période fixe, appelée période d'échantillonnage que nous noterons  $T_e$ .

Dans ce contexte de traitement numérique des données, nous pouvons avoir deux attitudes pour concevoir la commande.

La première consiste à choisir une période d'échantillonnage très rapide vis-à-vis du temps de réponse naturel du système à commander et considérer en conséquence que la commande numérique est quasi continue. Il est à noter que cette contrainte de fonctionnement quasi continu impose une période d'échantillonnage inférieure au centième de la constante de temps du système.

Avec cette contrainte, les outils issus de la transformée de Laplace seront opératoires.

L'autre alternative est de se choisir une période d'échantillonnage la plus grande possible, typiquement, entre la moitié et le dixième de la constante de temps du système. Dans ce cas, il est incontournable d'utiliser les outils issus des systèmes échantillonnés et la transformée en 'z'.

Cette seconde approche, qui est proposée, impose évidemment un changement radical de méthodologie de synthèse d'une commande. En s'écartant des synthèses continues, l'approche échantillonnée présente l'avantage de bien prendre en compte la réalité de l'échantillonnage. Cette démarche permet de relâcher les contraintes de calcul en temps réel de l'unité de traitement et réduit ainsi le coût du processeur de calcul.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons rappeler :

- la définition de l'échantillonnage ;
- ses principales propriétés ;
- la notion de transmittance échantillonnée ;
- les problèmes liés à la reconstitution d'un signal échantillonné ;
- la spécificité de l'association de systèmes échantillonnés ;
- l'intégration et la dérivation, par l'intermédiaire de la transformée en 'z'.

## 2. ECHANTILLONNAGE D'UNE FONCTION CONTINUE

### 2.1. Définition

L'échantillonnage d'un signal, que nous noterons  $f^*(t)$ , est le produit du signal causal  $f(t)$  par un peigne de Dirac avec une périodicité correspondante à la période d'échantillonnage  $T_e$ .

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e) \quad (2.1)$$

La fonction  $f^*(t)$  est une distribution constituée d'impulsions de Dirac aux instants d'échantillonnages.

La valeur numérique  $f(kT_e)$  à un instant  $t = kT_e$  est constituée par  $f(t)$  multipliée par l'impulsion de Dirac :

$$f(kT_e) = f(t)\delta(t - kT_e) \quad (2.2)$$

Conformément à la figure 2-1, nous noterons par le symbole  $\textcircled{\in}$ , l'opérateur d'échantillonnage.

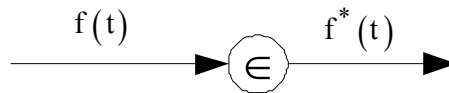


Figure 2-1 : Opérateur d'échantillonnage

Conventionnellement, nous représenterons la fonction échantillonnée  $f^*(t)$  par une suite de vecteurs dont les modules correspondent aux amplitudes de  $f(t)$  aux instants d'échantillonnage (cf. Fig. 2-2).

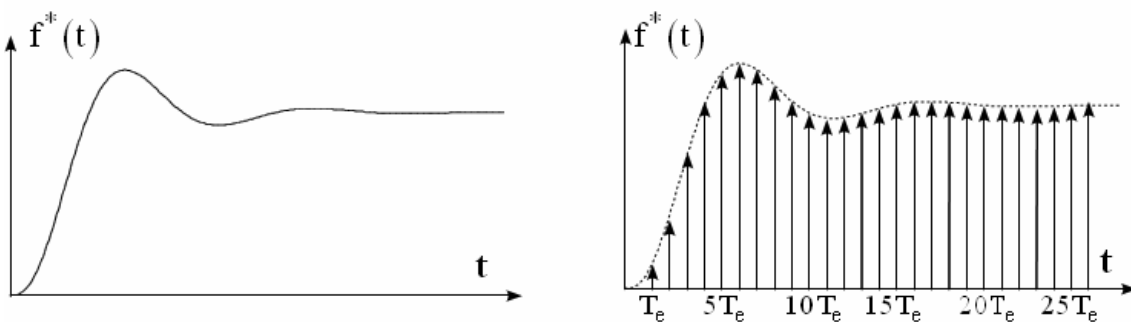


Figure 2-2 : Échantillonnage d'un signal continu

Afin de développer simplement quelques propriétés des systèmes échantillonnés, nous notons la fonction  $\text{III}(t)$  (prononcer cha) tel que :

$$\text{III}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k) \quad (2.3)$$

Sachant que l'impulsion de Dirac  $\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$ , la définition de l'échantillonnage peut s'exprimer à partir de la distribution  $\text{III}$  par :

$$f^*(t) = f(t) \frac{1}{T_e} \text{III} \left( \frac{t}{T_e} \right) \quad (2.4)$$

Le signal échantillonné est une distribution constituée d'une suite d'impulsions de Dirac dont la pondération correspond à la valeur  $f(k T_e)$  du signal  $f(t)$  à l'instant  $k T_e$ .

## 2.2. Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Considérons un signal  $f(t)$  réel continu dont la transformée de Fourier  $F(\nu)$  est réelle sans partie imaginaire et bornée sur l'intervalle  $[-\nu_0 + \nu_0]$  conformément à la figure 2-3.

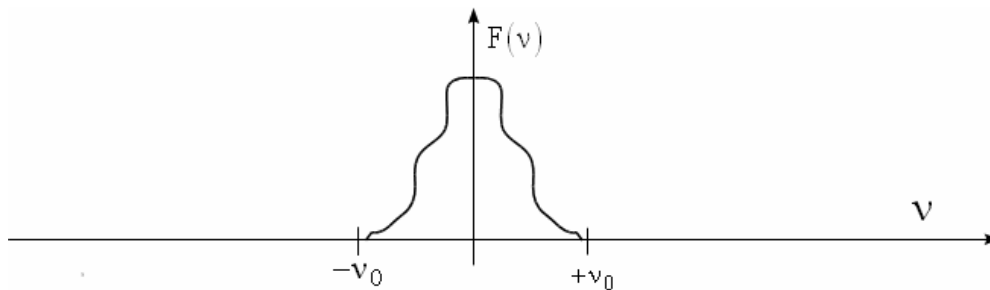


Figure 2-3 : Transformée de Fourier du signal avant échantillonnage

À partir de la relation (2.4), nous pouvons écrire :

$$F^*(\nu) = F(\nu) * \mathcal{F} \left( \frac{1}{T_e} \text{III} \left( \frac{t}{T_e} \right) \right) = F(\nu) * \text{III} (T_e \nu)$$

Soit, en explicitant  $\text{III} (T_e \nu)$  :

$$F^*(\nu) = F(\nu) * \left[ \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left( \nu - \frac{k}{T_e} \right) \right] = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F \left( \nu - \frac{k}{T_e} \right)$$

Au regard de cette dernière relation, nous pouvons constater la périodisation à  $\frac{k}{T_e}$  du spectre initial avec un gain de  $\frac{1}{T_e}$ .

Ce gain s'explique par le fait qu'une période d'échantillonnage faible conduit à une plus grande densité des échantillons.

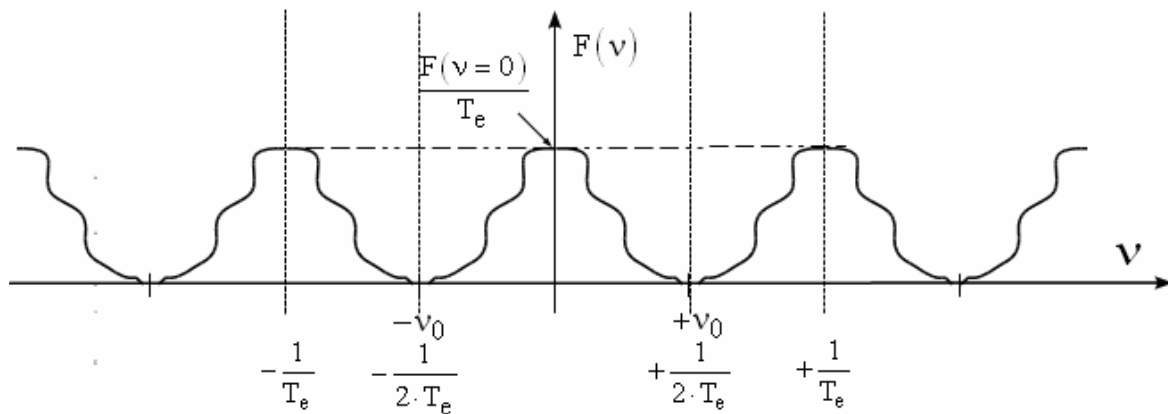


Figure 2-4 : Transformée de Fourier du signal échantillonné

Pour qu'il n'y ait pas de phénomènes de recouvrement de spectre, il est simple de remarquer, au vu de la figure 2-4 que la fréquence limite de spectre du signal d'entrée ne doit pas excéder la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Cette contrainte constitue le théorème de Shannon, qui considère que la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la fréquence la plus haute du signal.

$$v_0 < \frac{1}{2T_e} \Rightarrow 2v_0 < \frac{1}{T_e} \quad (2.5)$$

#### Remarques sur le théorème de Shannon.

Cette condition correspond à une vue idéalisée où le spectre du signal est borné et réel. Dans la pratique, nous n'avons pas d'assurance sur la limite haute du spectre. Afin de s'affranchir du phénomène de recouvrement du spectre, il est impératif d'opérer à un filtrage passe-bas avant échantillonnage.

Un autre point qui est généralement occulté, c'est l'aspect pair du spectre, pour les hautes fréquences du signal, cela est particulièrement critique.

Un petit exemple, considérons un signal à la fréquence limite du théorème de Shannon, dans ce cas, deux points seront pris par période. Si le signal est un cosinus, nous aurons une suite  $[-1,+1]$  et comme nous le montrerons ultérieurement, il sera possible de reconstituer le signal. Par contre pour un signal sinusoïdal les échantillons seront toujours nuls et toute l'information sera perdue. Entre ces deux cas, la perte est partielle.

### **2.3. Transformée de Laplace d'un signal échantillonné**

Afin de préciser la définition de la transformée en 'z' nous allons calculer la transformée de Laplace d'un signal échantillonné.

#### Convention préalable :

Lorsqu'un signal est défini dans le domaine temporel, nous utiliserons une lettre minuscule par exemple  $f(t)$ . Dans le domaine fréquentiel, une majuscule sera utilisée. Cependant, afin de ne pas alourdir l'écriture nous ne changerons pas de graphie. Ainsi, pour les transformées de Laplace, de Fourier, ou en 'z', bien que ces fonctions soient différentes, nous les noterons :  $F(p)$ ,  $F(z)$ ,  $F(v)$ .

Rappel sur la transformée de Fourier :  $\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{v}{a}\right)$  et  $\mathcal{F}(f(t)) = F(v)$

Soit,  $F^*(p) = \mathcal{L}(f(t))$  la transformée de Laplace d'un signal échantillonné, à partir de la définition (2.1), nous pouvons en calculer sa transformée.

$$F^*(p) = \mathcal{L}\left(f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e)\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) \delta(t - kT_e)\right)$$

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) \mathcal{L}(\delta(t - kT_e))$$

Sachant que  $\mathcal{L}(\delta(t - kT_e)) = e^{-kT_e p}$ , nous obtenons :

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e p} \quad (2.6)$$

Posons maintenant le changement de variable  $z = e^{T_e p}$  qui est la transformée de Laplace d'une avance d'une période d'échantillonnage, nous obtenons la relation suivante :

$$F(z) \triangleq F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} \quad (2.7)$$

$$z = e^{T_e p} \quad (2.8)$$

### Remarque importante

Ces dernières relations montrent que la transformée en 'z' d'un signal correspond à la transformée de Laplace du signal échantillonné pour lequel le changement de variable (2.8) a été effectué.

Nous allons maintenant définir les principales propriétés de la transformée en 'z' qui sont similaires à celles de la transformée de Laplace.

## **3. PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN 'Z'**

Comme la transformée en 'z' est en fait la transformée de Laplace d'un signal échantillonné, les propriétés qui lui sont liées sont similaires.

### **3.1. Linéarité**

$$\mathcal{Z}[f(t) + g(t)] = \mathcal{Z}[f(t)] + \mathcal{Z}[g(t)] = F(z) + G(z) \quad (3.1)$$

$$\mathcal{Z}[\rho \cdot f(t)] = \rho \cdot F(z) \quad (3.2)$$

### 3.2. Translation temporelle

Cas du retard.

$$\boxed{\mathbb{Z}[f(t - m T_e)] = z^{-m} F(z)} \quad (3.3)$$

Démonstration.

À partir de la relation (2.7), nous pouvons écrire :

$$\mathbb{Z}[f(t - m T_e)] = \sum_{k=0}^{\infty} f((k - m) T_e) z^{-k}$$

En multipliant par  $z^{-m} z^{+m}$ , il vient :  $\mathbb{Z}[f(t - m T_e)] = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} f((k - m) T_e) z^{-(k+m)}$

Si nous posons,  $n = k - m$  nous obtenons la forme désirée soit :

$$\mathbb{Z}[f(t - m T_e)] = z^{-m} \sum_{n=-m}^{\infty} f(n T_e) z^{-n}$$

Comme le signal étant causal, pour  $n < 0$ , les échantillons sont nuls, nous obtenons alors :

$$\mathbb{Z}[f(t - m T_e)] = z^{-m} F(z)$$

Cas de l'avance.

$$\boxed{\mathbb{Z}[f(t + m T_e)] = z^{+m} F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k \cdot T_e) z^{m-k}} \quad (3.4)$$

Le signal étant décalé vers les temps négatifs, pour que le signal  $f(t + m T_e)$  reste causal il faut lui soustraire les échantillons correspondants.

Démonstration.

Comme précédemment, nous pouvons écrire :  $\mathbb{Z}[f(t + m T_e)] = \sum_{k=0}^{\infty} f((k + m) T_e) z^{-k}$

Multiplions ensuite par  $z^{-m} z^{+m}$  et avec  $n = k + m$ , nous obtenons :

$$\mathbb{Z}[f(t + m T_e)] = z^{+m} \sum_{n=m}^{\infty} f(n T_e) z^{-n}$$

$$\mathbb{Z}[f(t + m T_e)] = z^{+m} \sum_{n=0}^{\infty} f(n T_e) z^{-n} - z^{+m} \sum_{n=0}^{m-1} f(n T_e) z^{-n}$$

$$\mathbb{Z}[f(t + m T_e)] = z^{+m} F(z) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n T_e) z^{m-n}$$

### 3.3. Translation complexe

Cette terminologie viens du fait que la multiplication par une exponentielle correspond pour la transformée de Laplace à une translation dans le domaine fréquentiel.

En effet, nous rappelons les relations :

$$\mathcal{L}(f(t)e^{-at}) = F(p+a) \text{ et } \mathcal{L}(f(t)e^{+at}) = F(p-a)$$

Pour la transformée en 'z', nous aurons les propriétés suivantes :

$$\boxed{\mathcal{Z}(f(t)e^{-at}) = F(z e^{+aT_e})} \quad (3.5)$$

$$\boxed{\mathcal{Z}(f(t)e^{+at}) = F(z e^{-aT_e})} \quad (3.6)$$

Démonstration.

À partir de (2.7), il vient :

$$\mathcal{Z}(f(t)e^{-at}) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)e^{-akT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)(ze^{aT_e})^{-k} = F(ze^{aT_e})$$

Pour la relation (3.6), il suffit de changer le signe de 'a'.

Exemple 2-1.

Calcul de la transformée en 'z' de la réponse impulsionnelle de la transmittance de Laplace de  $\frac{1}{p+a}$ .

Sachant que :  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right) = e^{-a \cdot t}$ , comme ce signal est causal, il est multiplié par la fonction de Heaviside (l'échelon), la transmittance en 'z' que nous désirons calculer a la forme :

$\mathcal{Z}(\mathbf{1}(t)e^{-a \cdot t})$ , ici  $\mathbf{1}(t)$  est un échelon dont la transmittance en 'z' vaut :

$$\mathcal{Z}(\mathbf{1}(t)) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}(\mathbf{1}(t)) = \frac{z}{z-1}} \quad (3.7)$$

Il vient alors :  $\mathcal{Z}(\mathbf{1}(t)e^{-at}) = \frac{ze^{+aT_e}}{ze^{+aT_e} - 1}$  que nous mettrons indifféremment sous les

formes suivantes :  $\mathcal{Z}(\mathbf{1}(t)e^{-at}) = \frac{z}{z - e^{-aT_e}} = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT_e}}$

$$\boxed{\mathcal{Z}(\mathbf{1}(t)e^{-at}) = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}} \quad (3.8)$$

### 3.4. Multiplication par le temps

$$\boxed{\mathbb{Z}(t f(t)) = -T_e z \frac{d}{dz} F(z)} \quad (3.9)$$

*Démonstration.*

$$\mathbb{Z}(t f(t)) = T_e f(T_e) z^{-1} + 2T_e f(2T_e) z^{-2} + 3T_e f(3T_e) z^{-3} + \dots + kT_e f(kT_e) z^{-k}$$

$$\mathbb{Z}(f(t)) = F(z) = f(0) + f(T_e) z^{-1} + f(2T_e) z^{-2} + f(3T_e) z^{-3} + \dots + f(kT_e) z^{-k}$$

$$\frac{d}{dz} F(z) = -f(T_e) z^{-2} - 2f(2T_e) z^{-3} - 3f(3T_e) z^{-4} - \dots - k f(kT_e) z^{-k-1}$$

Au vu de cette dernière expression, nous pouvons vérifier la relation (3.9).

*Exemple 2-2 :*

Calcul de la transformée en 'z' de la fonction  $f(t) = t$ .

Comme cette fonction est causale et nous devons calculer :

$$\mathbb{Z}(t \mathbf{1}(t)) = -T_e z \frac{d}{dz} [\mathbb{Z}(\mathbf{1}(t))]$$

Sachant que :  $\mathbb{Z}(\mathbf{1}(t)) = \frac{z}{z-1}$ , il vient :  $\mathbb{Z}(t \mathbf{1}(t)) = -T_e z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = -T_e z \left( \frac{-1}{(z-1)^2} \right)$

$$\boxed{\mathbb{Z}(t \mathbf{1}(t)) = \frac{T_e z}{(z-1)^2}} \quad (3.10)$$

*Multiplication par  $t^n$*

De la même manière dont nous avons opéré précédemment, nous pouvons généraliser à la multiplication par  $t^n$ .

$$\boxed{\mathbb{Z}(t^n f(t)) = -T_e z \frac{d}{dz} F_{n-1}(z)} \quad (3.11)$$

Avec  $F_{n-1}(z) = \mathbb{Z}(t^{n-1} f(t))$

### 3.5. Théorème à la valeur initiale

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow 0} (f(k)) = \lim_{z \rightarrow \infty} (F(z))} \quad (3.12)$$

*Démonstration.*

$$F(z) = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + f(3) z^{-3} + \dots + f(k) z^{-k}$$

Lorsque  $z \rightarrow \infty$   $F(z) \rightarrow f(0)$