Résolution de systèmes d'équations et d'inéquations

Équations du premier degré

Définition : Équation affine

On appelle équation affine toute équation linéaire de la forme $y = ax + b$ où a et b sont des réels. On appelle a le coefficient directeur de la droite et b l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire la valeur de y lorsque $x = 0$).

NB : une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est également l'équation affine d'une droite. Selon les cas, on pourra utiliser l'une ou l'autre des formes.

Calcul de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$: Soit une droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Calcul de a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Calcul de b :

b est la valeur prise par y lorsque $x = 0$. Si cette valeur n'est pas connue a priori, on détermine d'abord le coefficient directeur a et ensuite on utilise le fait que la droite passe par le point A ce qui implique que son équation doit vérifier :

$$y_A = ax_A + b$$

La seule inconnue dans l'équation ci-dessus est b et on déduit que :

$$b = y_A - ax_A$$

Résolution de $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{y} < 0$ et $\boldsymbol{y} > 0$

L'équation $y = ax + b = 0$ a pour solution $x = -\frac{b}{a}$

Cas où $\boldsymbol{a} < 0$

L'inéquation $y = ax + b < 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{x, x \in \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[\right\}$

L'inéquation $y = ax + b > 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{x, x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[\right\}$

Cas où $\boldsymbol{a} > 0$

L'inéquation $y = ax + b < 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{x, x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[\right\}$

L'inéquation $y = ax + b > 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{x, x \in \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[\right\}$

Équations du second degré

On appelle équation du second degré toute équation de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

On associe à toute équation du second un discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ dont le signe détermine le nombre de solutions à l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Résolution de $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{f(x)} < 0$ et $\boldsymbol{f(x)} > 0$

1er Cas : $\Delta < 0$

L'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Si $\boldsymbol{a} < 0$:

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x, x \in \mathbb{R}\}$ (et est donc toujours vraie).

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Si $\boldsymbol{a} > 0$:

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x, x \in \mathbb{R}\}$ (et est donc toujours vraie).

Tableau de signe :

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$	$signe\ de\ a$	

2e Cas : $\Delta = 0$

L'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ admet alors une racine double $r_1 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\boldsymbol{a} < 0$:

L'équation $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x, x \in \mathbb{R} \backslash \{r_1\}\}$.

L'équation $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Si $\boldsymbol{a} > 0$:

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x, x \in \mathbb{R} \backslash \{r_1\}\}$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$	r_1 $+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$	$signe\ de -a$	$signe\ de\ a$

3e Cas : $\Delta > 0$

L'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ admet alors deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $x_2 > x_1$.

Si $\boldsymbol{a} < 0$:

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[\}$.

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in]x_1, x_2[\}$.

Si $\boldsymbol{a} > 0$:

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in]x_1, x_2[\}$.

L'inéquation $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ a pour solution l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[\}$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$ $\quad$ x_1	x_2	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$	$signe\ de - a$	$signe\ de\ a$	$signe\ de - a$

Polynôme de degré $\boldsymbol{n}$: le binôme de Newton :

Soit x et y deux réels, soit $n \in \mathbb{N}$, la puissance entière de la somme $x + y$ est donnée par le binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

On remarquera que x et y jouent des rôles symétriques et qu'on peut donc les échanger. De plus les coefficients $\binom{n}{k}$ correspondent à la nouvelle notation et s'écrivaient C_n^k auparavant, avec :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

et sont communément appelés coefficients binomiaux.

Généralités sur les suites

Définition : Suite

On appelle suite de nombres réels toute fonction u définie sur une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note : $\begin{array}{l} u: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ \quad n \to u_n \end{array}$ ou $(u_n)_{\mathbb{N}}$

Définitions : Suites majorées, minorées, bornées et périodiques

Suite majorée
Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite majorée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est alors appelé le majorant de la suite et ne dépend pas de n.

Suite minorée
Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite minorée si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. m est alors appelé le minorant de la suite et ne dépend pas de n.

Suite bornée
Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée. C'est-à-dire si et seulement s'il existe $(M, m) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$ (c'est-à-dire tel que u_n soit encadrée).

Suites monotones

Suite constante
Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite constante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

Suite stationnaire
Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite stationnaire si et seulement si elle est constante après un certain indice p. C'est-à-dire si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, $u_n = u_p$.

Suite croissante
Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$. Dans ce cas là, on aura également $(u_n)_{\mathbb{N}}$ croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Suite décroissante
Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$. Dans ce cas là, on aura également $(u_n)_{\mathbb{N}}$ décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Suites arithmétiques

Définition : Suites arithmétiques de raison r

Une suite $(\mathrm{u_n})_{\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si et seulement s'il existe $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Propriétés des suites arithmétiques

▪ **Forme explicite**
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

▪ **Caractéristique des suites arithmétiques**
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2, u_p = u_q + (p-q)r$

▪ **Somme des termes d'une suite arithmétique**
Pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2} =$ "$\textit{moyenne des extrêmes} * \textit{nb termes}$" avec :

$(n+1) =$ nombre de termes inclus dans la somme (dernier terme - premier terme + 1)

Suites géométriques

Définition : Suites géométriques de raison q

Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite géométrique si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$.

Propriétés des suites géométriques

▪ **Forme explicite**
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = q^{n-1}.u_1 = q^n.u_0$

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{R}^2, u_n = q^{n-p}.u_p$

▪ **Somme des termes d'une suite géométrique**

Pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0(n+1) \ si \ q = 1 \\ \frac{u_0(1-q^{n+1})}{(1-q)} \ si \ q \neq 1 \end{cases}$

Valeur absolue

Ce court paragraphe sur la valeur absolue est fondamental. Parmi les erreurs plus fréquentes des candidats, on compte l'erreur commise lorsque l'on passe de $|x|$ à $\pm x$. Lisez attentivement ce qui suit et mémorisez-le !

Définition : valeur absolue

Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x sa valeur numérique, indépendamment de son signe et on la note $|x|$.

Lorsque x est positif :

On peut alors écrire : $|x| = x$

Exemple :

Si $x = 5$*, alors* $|x| = x = 5$

Si $x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$*, alors* $x^2 - 1 \geq 0$ *et on peut écrire* $|x^2 - 1| = x^2 - 1$

Lorsque x est négatif :

On peut alors écrire : $|x| = -x$

Exemple :

Si $x = -5$*, alors* $|x| = -x = -(-5) = 5$

Si $x \in [0; 1]$*, alors* $x^2 - 1 \leq 0$ *et on peut écrire* $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1) = 1 - x^2$

Parité

On dit qu'une fonction f définie sur son ensemble de définition D_f est paire si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall\, x \in D_f\,, & -x \in D_f \quad (D_f \text{ est symétrique}) \\ \forall\, x \in D_f\,, & f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Exemple : La fonction $f(x) = x^2$, définie sur $\mathbb{R}$ est paire.

On dit qu'une fonction f définie sur son ensemble de définition D_f est impaire si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall\, x \in D_f\,, & -x \in D_f \\ \forall\, x \in D_f\,, & f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Exemple : La fonction $f(x) = x^3$, définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.