

1. CALCULS

Identités remarquables

Si a et b sont deux réels, on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Opérations sur les fractions

Si a, b, c et d sont des réels, avec b et d non nuls, on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Si a, b, c et d sont des réels, avec b et d non nuls, on a :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Si a, b, c et d sont des réels, avec b, c et d non nuls, on a :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Puissances

Si n et p sont des entiers naturels, on a, pour tout réel a :

$$a^{n+p} = a^n a^p$$

$$(a^n)^p = a^{np}$$

Si de plus, a est différent de 0, on a : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Si a et b sont des réels, on a, pour tout entier naturel n :

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Si de plus, b est différent de 0, on a : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$



*Il est difficile de faire la différence entre un mathématicien
qui dort et un mathématicien qui travaille.*

André Lichnerowicz

2. SOMMES ET PRODUITS

_____ Somme des termes d'une suite constante _____

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^n a = (n-p+1)a$$

_ Sommes des n premiers entiers naturels non nuls _

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

_____ Sommes géométriques _____

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement : $\forall q \neq 1, \forall n \geq p, \sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

_____ Distributivité, commutativité et associativité _____

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^n x_k \quad (\lambda \text{ ne dépend pas de l'indice.})$$

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k$$

Changement d'indice

Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

Seuls les deux changements d'indice suivants sont autorisés :

- Changement d'indice : $i = k + m$ (avec m entier)

$$\sum_{k=p}^n x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$$

- Changement d'indice : $i = m - k$ (avec m entier supérieur ou égal à n)

$$\sum_{k=p}^n x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$$

Télescopage

Quels que soient les réels x_0, \dots, x_{n+1} , on a :

$$\sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$$

Factorielle

Pour tout entier naturel n , on appelle *factorielle* de n , et on note $n!$, l'entier naturel défini par $0! = 1$ et, pour tout entier naturel n

non nul : $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $n! = n \times (n-1)!$.

Produit de termes d'une suite constante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \lambda = \lambda^n$$

Opérations compatibles avec \prod

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \left(\prod_{k=1}^n y_k \right)$$

Si aucun des y_k n'est nul, alors :

$$\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\prod_{k=1}^n y_k}$$

Télescopage

Si aucun des x_k n'est nul, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$$



*Il n'y a pas de place durable dans le monde
pour les mathématiques laides.*

Godfrey Hardy

3. ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Comparaison d'ensembles

On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B .

On dit que deux ensembles A et B sont *égaux*, on note $A = B$, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$.

On dit que l'ensemble A est une *partie* de l'ensemble E (ou encore un *sous-ensemble* de E) lorsque A est inclus dans E .

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Intersection et réunion

L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

La *réunion* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Commutativité

L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A$$

Associativité

L'intersection et la réunion sont associatives :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

Les ensembles considérés dans la suite sont tous des parties d'un ensemble Ω .

Élément neutre

Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$.

\emptyset est élément neutre pour la réunion : $A \cup \emptyset = A$.

Inclusion, intersection et réunion

$$A \cap B \subset A \text{ et } A \subset A \cup B$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

$$A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A$$

Distributivité

L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Complémentaire

Le *complémentaire* de A est l'ensemble, noté \bar{A} , contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A . On a : $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

$$\text{On a : } \bar{\bar{A}} = A ; \bar{\emptyset} = \Omega ; \bar{\Omega} = \emptyset.$$

\bar{A} est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

Lois de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Plus généralement, si I désigne un ensemble d'indices, on a :

$$\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \text{ et } \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

Produit cartésien

On définit le *produit cartésien* des ensembles A_1, A_2, \dots, A_n par :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in A_i \}.$$

Le produit $A \times A$ est noté A^2 .

Ensembles dénombrables, ensembles finis

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection de E sur \mathbb{N} , c'est-à-dire si l'on peut numéroter ses éléments.

Un ensemble E est dit *fini* s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de E , et est noté $\text{Card}(E)$.

On a $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Dans toute la suite, E, F et G désignent des ensembles.

Fonctions et applications

Une fonction f de E dans (ou vers) F est un procédé qui permet d'associer certains éléments de E avec des éléments de F appelés leurs images, de telle façon que tout élément x de E possède au maximum une image y dans F .

Une application f de E dans F est une fonction de E dans F telle que tout élément de E possède exactement une image par f dans F .

Identité

On appelle *identité* de E (ou *application identique* de E), l'application de E dans E , notée Id_E et définie par :

$$\forall x \in E, Id_E(x) = x$$

Composée d'applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G . On note $g \circ f$ (et on lit "g rond f") l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$