1. SOMMES ET PRODUITS

Somme des termes d'une suite constante

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$$

Sommes des puissances des *n* premiers entiers

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Sommes géométriques

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}}$$

Plus généralement : $\forall q \neq 1,\ \forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Distributivité, commutativité et associativité

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \ \ (\lambda \text{ ne dépend pas de l'indice.})}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k}$$

Changement d'indice

Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

Seuls les deux changements d'indice suivants sont autorisés :

- Changement d'indice : $i = k + m$ (avec m entier)

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$$

- Changement d'indice : $i = m - k$ (avec m entier supérieur ou égal à n)

$$\sum_{k=p}^{n} x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$$

Télescopage

Quels que soient les réels $x_0, ..., x_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x_{k+1} - x_k\right) = x_{n+1} - x_0$$

Interversion de sommes doubles

Si les indices sont indépendants :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j})$$

Si les indices sont dépendants :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$$

Lien entre somme simple et double

Quels que soient les réels $x_1,...,x_n$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

Factorielle

Pour tout entier naturel n, on appelle *factorielle* de n, et on note $n!$, l'entier naturel défini par $0!=1$ et, pour tout entier naturel n non nul : $n!=\prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times ...\times n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n! = n\times(n-1)!$.

Produit de termes d'une suite constante

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\lambda=\lambda^n$$

Opérations compatibles avec $\prod$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\left(x_k y_k\right)=\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$$

Si aucun des y_k n'est nul, alors : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{y_k}=\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} y_k}$

Télescopage

Si aucun des x_k n'est nul, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{x_{n+1}}{x_0}$$

Notes

2. ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Comparaison d'ensembles

On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B.

On dit que deux ensembles A et B sont *égaux*, on note $A = B$, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$.

On dit que l'ensemble A est une *partie* de l'ensemble E (ou encore un *sous-ensemble* de E) lorsque A est inclus dans E.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Intersection et réunion

L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

$$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B}$$

La *réunion* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B.

$$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B}$$

Commutativité

L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$\boxed{A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A}$$

Associativité

L'intersection et la réunion sont associatives :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

Les ensembles considérés dans la suite sont tous des parties d'un ensemble Ω.

Élément neutre

Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$
$\varnothing$ est élément neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = A$.

Inclusion, intersection et réunion

$$\boxed{A \cap B \subset A \text{ et } A \subset A \cup B}$$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

$$\boxed{A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A}$$

Distributivité

L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Complémentaire

Le *complémentaire* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On a : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

On a : $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$.
$\overline{A}$ est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}}$$

Lois de Morgan

$$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Produit cartésien

On définit le *produit cartésien* des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par :
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i \}$.
Le produit $A \times A$ est noté A^2.

Partition

Une *partition* d'un ensemble E en n classes est un ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ constitué de parties de E, appelées classes de la partition, et vérifiant :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_k \neq \varnothing$ (aucun A_k ne doit être vide).
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$ (la réunion des A_k est égale à E).
- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (on dit que les A_i sont deux à deux disjoints)

L'ensemble $\{ A_k,\ k \in \mathbb{N}^* \}$ est une partition (infinie) de E si :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \neq \varnothing$.
- $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = E$.
- $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Ensembles dénombrables, ensembles finis

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

Un ensemble E est dit *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul tel qu'il existe une bijection de E vers $[\![1, n]\!]$.
Le nombre n est appelé cardinal de E, noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.
On a $\text{card}(\varnothing) = 0$.

Dans toute la suite, E, F et G désignent des ensembles.

Fonctions et applications

Une fonction f de E dans (ou vers) F est un procédé qui permet d'associer certains éléments de E avec des éléments de F appelés leurs images, de telle façon que tout élément x de E possède au maximum une image y dans F.

Une application f de E dans F est une fonction de E dans F telle que tout élément de E possède exactement une image par f dans F.
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{A}(E, F)$.

Identité

On appelle *identité* de E (ou *application identique* de E), l'application de E dans E, notée Id_E et définie par :

$$\boxed{\forall x \in E,\ Id_E(x) = x}$$

Restriction d'une application

Soit f une application de E dans F et E' une partie de E. On appelle *restriction* de f à E', l'application notée $f_{|E'}$ définie par :

$$\boxed{\forall x \in E', f_{|E'}(x) = f(x)}$$

Composée d'applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. On note $g \circ f$ (et on lit "g rond f") l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Lorsque les composées écrites ci-après existent, on a :

$$\boxed{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h}$$

Si f est une application de E dans F, on a :

$$\boxed{f \circ Id_E = Id_F \circ f = f}$$

Image directe, image réciproque

Soit f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle *image directe* de A par l'application f, l'ensemble $f(A)$, défini par :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Soit B une partie de F. On appelle *image réciproque* de B par l'application f, l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Injection

Une application f de E dans F est *injective* (ou est une *injection*) si chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E par f.

Une application f de E dans F est injective si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$