

1. SOMMES ET PRODUITS

_____ Somme des termes d'une suite constante _____

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^n a = (n-p+1)a$$

___ Sommes des puissances des n premiers entiers ___

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

_____ Sommes géométriques _____

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement : $\forall q \neq 1, \forall n \geq p, \sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

_____ Distributivité, commutativité et associativité _____

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^n x_k \quad (\lambda \text{ ne dépend pas de l'indice.})$$

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k$$

Changement d'indice

Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

Seuls les deux changements d'indice suivants sont autorisés :

- Changement d'indice : $i = k + m$ (avec m entier)

$$\sum_{k=p}^n x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$$

- Changement d'indice : $i = m - k$ (avec m entier supérieur ou égal à n)

$$\sum_{k=p}^n x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$$

Télescopage

Quels que soient les réels $x_0, \dots, x_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$$

Interversion de sommes doubles

Si les indices sont indépendants :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{i,j} \right)$$

Si les indices sont dépendants :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_{i,j}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$$

_____ Lien entre somme simple et double _____

Quels que soient les réels $x_1, \dots, x_n$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

_____ Factorielle _____

Pour tout entier naturel n , on appelle *factorielle* de n , et on note $n!$, l'entier naturel défini par $0! = 1$ et, pour tout entier naturel n

non nul : $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n! = n \times (n-1)!$.

_____ Produit de termes d'une suite constante _____

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \lambda = \lambda^n$$

_____ Opérations compatibles avec $\prod$ _____

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)$$

$$\text{Si aucun des } y_k \text{ n'est nul, alors : } \prod_{k=1}^n \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\prod_{k=1}^n y_k}$$

_____ Télescopage _____

Si aucun des x_k n'est nul, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$$

2. ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Comparaison d'ensembles

On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B .

On dit que deux ensembles A et B sont *égaux*, on note $A = B$, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$.

On dit que l'ensemble A est une *partie* de l'ensemble E (ou encore un *sous-ensemble* de E) lorsque A est inclus dans E .
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Intersection et réunion

L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

La *réunion* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Commutativité

L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A$$

Associativité

L'intersection et la réunion sont associatives :

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \end{aligned}$$

Les ensembles considérés dans la suite sont tous des parties d'un ensemble Ω .

Élément neutre

Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$

$\emptyset$ est élément neutre pour la réunion : $A \cup \emptyset = A$.

Inclusion, intersection et réunion

$$A \cap B \subset A \text{ et } A \subset A \cup B$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

$$A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A$$

Distributivité

L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Complémentaire

Le *complémentaire* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A . On a : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

$$\text{On a : } \overline{\overline{A}} = A ; \overline{\emptyset} = \Omega ; \overline{\Omega} = \emptyset.$$

$\overline{A}$ est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Lois de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Produit cartésien

On définit le *produit cartésien* des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ par :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in A_i \}.$$

Le produit $A \times A$ est noté A^2 .

Partition

Une *partition* d'un ensemble E en n classes est un ensemble $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ constitué de parties de E , appelées classes de la partition, et vérifiant :

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_k \neq \emptyset$ (aucun A_k ne doit être vide).
- $\bigcup_{k=1}^n A_k = E$ (la réunion des A_k est égale à E).
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ (on dit que les A_i sont deux à deux disjoints).

L'ensemble $\{A_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ est une partition (infinie) de E si :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, A_k \neq \emptyset$.
- $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = E$.
- $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Ensembles dénombrables, ensembles finis

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

Un ensemble E est dit *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul tel qu'il existe une bijection de E vers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Le nombre n est appelé cardinal de E , noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.

On a $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Dans toute la suite, E, F et G désignent des ensembles.

Fonctions et applications

Une fonction f de E dans (ou vers) F est un procédé qui permet d'associer certains éléments de E avec des éléments de F appelés leurs images, de telle façon que tout élément x de E possède au maximum une image y dans F .

Une application f de E dans F est une fonction de E dans F telle que tout élément de E possède exactement une image par f dans F . L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{A}(E, F)$.

Identité

On appelle *identité* de E (ou *application identique* de E), l'application de E dans E , notée Id_E et définie par :

$$\forall x \in E, Id_E(x) = x$$

Restriction d'une application

Soit f une application de E dans F et E' une partie de E . On appelle *restriction* de f à E' , l'application notée $f|_{E'}$ définie par :

$$\forall x \in E', f|_{E'}(x) = f(x)$$

Composée d'applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G . On note $g \circ f$ (et on lit "g rond f") l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Lorsque les composées écrites ci-après existent, on a :

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$$

Si f est une application de E dans F , on a :

$$f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$$

Image directe, image réciproque

Soit f une application de E dans F et A une partie de E . On appelle *image directe* de A par l'application f , l'ensemble $f(A)$, défini par :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Soit B une partie de F . On appelle *image réciproque* de B par l'application f , l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Injection

Une application f de E dans F est *injective* (ou est une *injection*) si chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E par f .

Une application f de E dans F est injective si, et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Surjection

Une application f de E dans F est *surjective* (ou est une *surjection*) si chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E par f .

Une application f de E dans F est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Bijection

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une application *bijective* (on dit aussi une *bijection*) si elle est injective et surjective.

Une application f de E dans F est bijective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection de E dans F si, et seulement si, il existe une application g de F dans E telle que :

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F$$

La fonction g est alors appelée *bijection réciproque* de f et est notée f^{-1} . On a alors l'équivalence :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Composée de bijections

Si f est une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G , alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et l'on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Théorème de la bijection

Si f est une application, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continue et strictement monotone sur I , alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Lorsque f est bijective et monotone, f et f^{-1} ont les mêmes variations.