

Introduction

Par le passé, on pensait que la science en général et la physique en particulier étaient comprises, en quelque sorte « closes » et figées. Depuis la découverte des quanta, l'élaboration de la relativité et surtout maintenant avec les découvertes et les observations que l'on tire des accélérateurs et des collisionneurs, on se rend compte que la physique est ouverte et que toutes les questions n'ont pas encore trouvé de réponses satisfaisantes.

Pour avancer dans notre réflexion, nous nous servirons des paradoxes. Pour nous, ce type de raisonnement met à l'épreuve les théories scientifiques. Chercher des exemples, des contre-exemples et des idées qui semblent contrarier les théories elles-mêmes, est une démarche féconde qui permet de mieux définir les concepts, donc de servir la vérité scientifique.

La thématique des paradoxes est l'occasion de définir sur des exemples, les modèles physiques les plus intéressants : la dualité onde-corpuscule de la lumière, le deuxième principe de la thermodynamique avec l'apparition de la vie et les premières molécules organiques, la mécanique quantique, la relativité restreinte, les modèles d'Univers enfin, qui ont pour mission de décrire l'Univers depuis le Big-Bang jusqu'à sa disparition. En fait, les thèmes susceptibles d'intéresser le plus grand nombre.

Ce livre s'adresse à un large lectorat souhaitant prendre du recul pour analyser les théories générales et se rendre compte de la cohérence de l'ensemble des modèles physiques. Bien entendu, les descriptions que nous faisons utilisent des mots, mais il faut prendre conscience que même sans équations, la présentation reste très mathématique et il ne faut pas s'attendre, dans des domaines aussi complexes que la mécanique quantique et la relativité, à tout « comprendre » dès la première lecture¹. Il faut accepter cet état des choses, poursuivre la lecture et de proche en proche, les choses se mettront en place. La première écoute d'une musique de Pierre Boulez peut être déroutante ; il faut avoir la patience et l'humilité d'une deuxième,

1 Einstein n'a-t-il pas dit : « Il faudrait que tout soit aussi simple que possible, mais pas plus simple ».

puis d'une troisième écoute pour découvrir les sonorités, les rythmes et les respirations musicales. Il en sera de même dans ce livre.

Puissiez-vous trouver dans cet ouvrage les informations pour vous aider à avoir une idée plus précise des lois récentes qui sous-tendent la physique.

Philippe Ribière, Chérif Zananiri
chzananiri@yahoo.fr, ribierep@orange.fr

Qu'est-ce qu'un paradoxe ?

Dans ce premier chapitre, on montre sur plusieurs exemples ce que représente le paradoxe comme démarche intellectuelle ; on y parle de la divisibilité de l'espace et du temps, du continu et du discontinu, du mouvement relatif ou absolu. On termine par le paradoxe du papi assassiné dans les univers parallèles et de Franck et Jacky survolés par l'oiseau des îles.

Qu'est-ce qu'un paradoxe ? Paradoxe, du grec *para*, « à côté », et *doxa*, « opinion » est une proposition contraire à l'opinion commune.

Il s'agit donc d'une affirmation qui contient les germes apparents d'une contradiction. Souvent d'ailleurs, elle apparaît uniquement pour clarifier les idées : elle a donc une mission pédagogique.

Il faudrait pourtant distinguer les paradoxes qui ne sont qu'apparents et qui ne résistent pas à un examen minutieux, comme ceux que nous développons, des « vrais » paradoxes, qui soulèvent de réels gros problèmes.

Commençons par une histoire : l'histoire des crétois menteurs. Là, il s'agit d'un vrai paradoxe que l'on ne peut résoudre et qui montre que le système que l'on considère est inconsistant : il ne saurait exister.

Épéménide, un des habitants de Crète dit : « tous les Crétois sont des menteurs ». S'il ment, alors les Crétois ne mentent pas et il dit donc la vérité... on est face à un problème ; mais si ce qu'il dit est vrai, alors c'est un menteur puisque tous les Crétois ne sont donc pas menteurs,... on est là aussi face à un problème. Il y a contradiction, donc paradoxe. Le problème a longuement intrigué les philosophes ; au XIV^e siècle un certain Buridan développe une solution qui consiste à dire que chaque proposition contient par sa formulation une vérité qui se réfère à la première donnée. Ainsi, si la proposition originale sous-entend qu'elle est elle-même fautive, cela veut dire qu'elle est vraiment fautive.

On vous propose des éléments de réflexion

Vous rencontrez une personne susceptible de mentir, par exemple, soit une Franche, soit une Vile (comme les noms l'indiquent, il y a une personne qui ment et l'autre disant la vérité) et vous lui demandez « êtes-vous Franche ? » Que répond-elle ?

Vous avez assez réfléchi pour trouver la solution ?

Elle répondra toujours oui.

Compliquons cette devinette. Si maintenant vous croisez deux personnes dont l'une vous dit : « nous sommes des Viles », qu'en déduisez-vous ?

Si c'est une Franche qui a parlé, disant toujours la vérité, elles seraient toutes deux Viles. Celle qui parle est donc Vile et par conséquent l'autre est Franche, car toute proposition faite par une Vile est fausse. Encore une fois, on peut accéder à la bonne réponse en dépit des mensonges et le paradoxe est levé.

Vous voyez, cela n'est pas si simple, car si nous disons : « j'affirme que cette phrase est fausse », on ne sait même pas si c'est juste ou faux. Car si la proposition est vraie, alors elle est fausse, et si la proposition est fausse, son contraire devrait être vrai. C'est un peu ce qui s'est passé dans *Star Trek*. Lors d'un des épisodes, le capitaine Kirk devait défier un androïde en disant qu'il mentait tout le temps ; il a ajouté ensuite : « je mens ». Cela a tué l'androïde.

Ce type de raisonnement fait assez souvent intervenir des boucles dans la démarche ; on appelle ce type de boucle, l'autoréférence. Mais il arrive que le travail en boucle soit vain. Ainsi, comment comprendre le paradoxe du barbier qui rase toutes les personnes de la ville, mais qui ne se rase pas lui-même (le barbier est en fait une « barbière ») ? Autre exemple laissé à votre sagacité : où se trouve la clef du paradoxe dans le raisonnement suivant « un cheval à un euro est rare parce que bon marché, et donc cher puisque tout ce qui est rare est cher ? ».

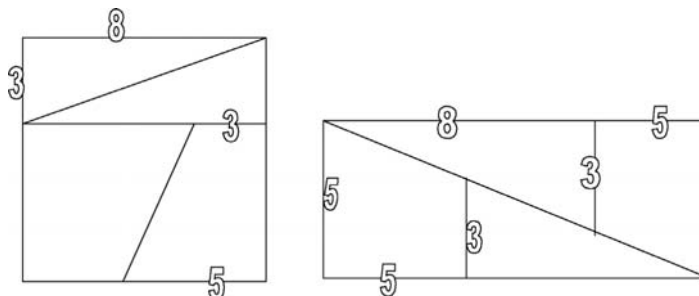
Théorie des ensembles ■

Prenons comme autre exemple, le paradoxe de Bertrand Russell formulé en 1901. Le problème revient à se poser la question de savoir si l'ensemble de tous les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes est compris dans lui-même ou non. La première hypothèse est qu'il ne s'inclut pas lui-même, mais alors il doit s'inclure lui-même, puisqu'il comprend tous les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes. La seconde hypothèse est qu'il s'inclut lui-même, mais cela implique alors une impossibilité, puisqu'il n'inclut que les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes. Le paradoxe, c'est donc qu'il doit s'inclure lui-même (il inclut tous les ensembles) et qu'il ne doit pas

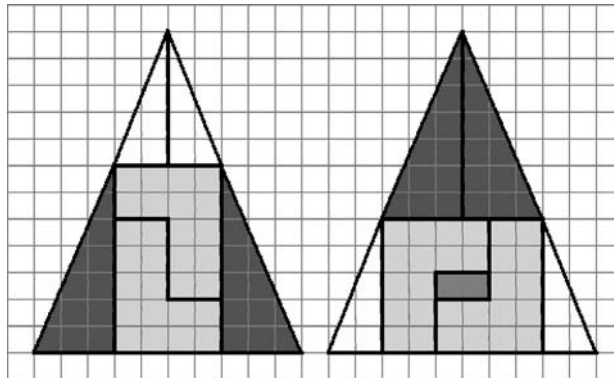
s'inclure lui-même (il n'inclut que ceux qui ne s'incluent pas eux-mêmes). Or, selon le principe de non-contradiction, on ne peut pas avoir A et non A en même temps. Pourtant, ici, c'est le cas : la première et la deuxième hypothèse coexistent. Or si la première est vraie, alors la seconde est fausse, et inversement. Donc le paradoxe implique que le vrai est faux et le faux vrai. Il constitue un problème insoluble. Il semble signifier l'inexistence de la vérité. Mais est-ce véritablement le cas ?

En fait, il existe bien une vérité : celle que recèle la « résolution » du paradoxe par Russell lui-même. C'est ce qui apparaît si l'on se penche sur la théorie des types, élaborée par ce dernier. Celle-ci consiste à poser qu'un ensemble doit toujours être d'un type supérieur au type de ses éléments. Il existe ainsi une hiérarchie de types ou de niveaux, selon laquelle toute entité appartient à un type et un seul, et de plus une propriété ne peut être attribuée à une entité que si cette entité est du type immédiatement inférieur au type de la propriété. Le type 0 correspondra alors à tous les individus, le type 1 à toutes les propriétés d'individus, le type 2 à toutes les propriétés de propriétés d'individus, le type 3..., ainsi de suite, à l'infini. Si bien que l'ensemble de tous les ensembles devrait être d'un type supérieur à lui-même (puisqu'il est à la fois ce qui inclut et ce qui est inclus). D'où la conclusion de Russell, qui est que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. En d'autres termes, l'ancienne définition de l'ensemble, celle de Cantor (selon laquelle un ensemble est ce qui rassemble des éléments sous une même propriété, par exemple « inclure les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes »), est fausse.

On vous propose ce paradoxe à la fois géométrique et « visuel » que Lewis Carol a conçu. Il est parti d'un carré de côté 8 et l'a découpé comme l'indique la figure ci-dessous, puis l'a reconstitué. L'aire du premier est 64 alors que celle de la deuxième construction est 65. On en déduit naïvement que $64 = 65$. Il y a bien entendu une supercherie. Elle est strictement visuelle, car le carré de départ ne se reconstitue pas en un rectangle ; il manque un petit triangle dont l'aire est égale à l'unité.



Le paradoxe géométrique et pseudo visuel de Lewis Carol



*Le triangle de Curry révèle ce que masque le paradoxe de Lewis.
Les deux triangles n'ont pas mêmes aires.*

Maintenant que nous avons touché du doigt la nature de certains paradoxes, forts de ces éléments, nous sommes en mesure d'aller plus loin. Parlons d'Achille et de la tortue.

Achille et la tortue, les deux premiers paradoxes de Zénon ■

Nous allons suivre le raisonnement de Zénon d'Élée. D'après le raisonnement de Zénon, Achille, le célèbre et rapide Achille ne pourra jamais rattraper la lente tortue. « Quelle tortue me direz-vous ? » Patientez, commençons par le début, c'est-à-dire par l'École de philosophie d'Élée.

Cette école de pensée a été fondée par des poètes tels que Xénophane, né six siècles avant Jésus-Christ. Les maîtres enseignent que l'univers est singulier, éternel et immuable. « Le tout est un » disent-ils ! Il s'ensuit que tout est illusion, y compris le mouvement.

Peu de temps après, un autre philosophe se distingue : Parménide. Il croit à l'unité et à la constance de la réalité ; il insiste sur le fait que les perceptions et les opinions ne sont pas des faits. Zénon est son élève. Ce qui nous reste de lui, fait partie des traditions orales qu'ont laissées les philosophes grecs. Ce qui veut aussi dire qu'il ne nous reste aucun écrit de sa main.

À l'époque, deux conceptions s'affrontaient chez les Grecs : les uns pensaient que l'espace était discret, les autres qu'il était continu. Si l'espace est discret, alors il est possible de le découper en autant de parties que nous pouvons l'imaginer mais l'on finit par arriver à un espace élémentaire, indivisible, une sorte d'« atomes d'espace ». Si l'espace est continu, alors, aussi loin que nous allons, nous pouvons le diviser, jusqu'à l'infini. Tout élément

d'espace est divisible. Comme Zénon refusait les deux positions, il a imaginé ses paradoxes.

L'apport principal de Zénon a été de montrer comment on peut arriver à des conclusions absurdes à partir de raisonnements apparemment bien construits. Zénon savait bien que les flèches atteignent les cibles, que le plus rapide rattrape le plus lent, mais il nous a laissé une image de l'idée que se faisaient les Grecs de ces deux concepts d'espace et de temps.

Commençons par le paradoxe le plus simple (et sans doute le plus célèbre), parlons d'Achille et de la tortue.

Considérons donc Achille, le plus rapide des guerriers grecs, obligé de concourir avec une tortue. Il est raisonnable de donner un handicap au Grec : la lente tortue partira plus tôt. Zénon prétend que quelle que soit la vitesse du héros grec, il ne pourra jamais rattraper la tortue. En effet, lorsqu'Achille atteint le point où se trouvait la tortue, celle-ci a déjà quitté son emplacement d'origine et se trouve un peu plus loin. La deuxième étape se déroule dans les mêmes conditions, Achille court vers le nouvel endroit où est la tortue et encore une fois, Achille n'atteint pas l'animal, qui a avancé entre-temps et ainsi de suite. Il pourra toujours réduire l'avance, mais jamais il ne touchera la queue de l'animal.

Le deuxième paradoxe, de la même nature que le premier, est le « paradoxe de dichotomie ».

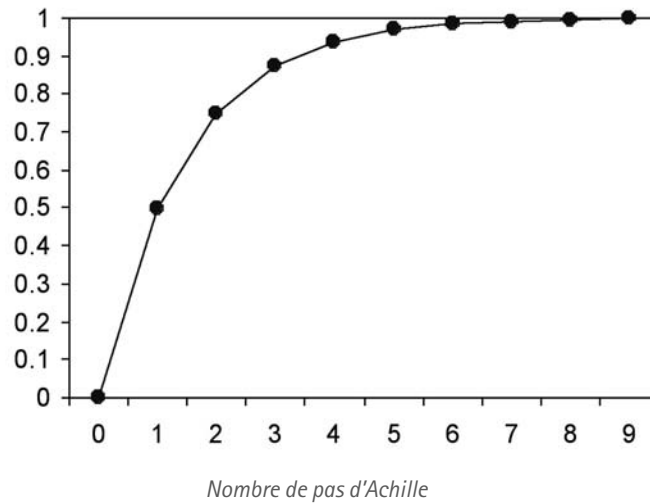
Achille, encore lui, souhaite se rendre au village voisin distant de d . Au préalable, il effectue la moitié du parcours, il lui reste donc $d/2$. Arrivé à mi-parcours, on reprend le raisonnement pour dire qu'il fait d'abord $d/4$, et ainsi de suite. Il a donc une somme infinie de parcours à effectuer. Par conséquent, il faut effectuer un trajet infini, qui ne peut se parcourir qu'en un temps infini. On peut en conclure qu'il n'arrivera jamais à destination.

Malheureusement, ces raisonnements sont faux : une somme infinie de termes ne donne pas nécessairement l'infini, en tout cas pas ici.

Intéressons-nous de plus près à la somme des termes :

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$$

Nombre de termes	Total de la somme
4	$1/2+1/4+1/8+1/16 = 0,875$
5	$1/2+1/4+1/8+1/16+1/32= 0,908$
6	$1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64=0,921$



Si vous vérifiez le total sur une calculatrice, vous trouverez qu'au fur et à mesure que le nombre de termes de la somme augmente, le résultat tend vers 1. Vous voyez, le physicien dira qu'Achille rattrape la tortue car la série converge vers 1. Le sens commun est trompé par l'assertion suivante qui est fautive : « une somme infinie de terme donne un résultat infinie », d'où le paradoxe.

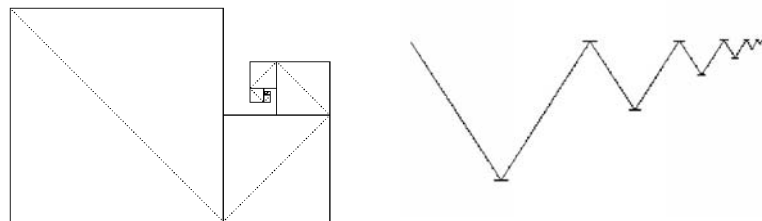
Il faut se rendre compte que ces paradoxes ont pour but de critiquer les notions de mouvement continu et mettent en lumière les notions de divisibilité de l'espace et du temps. La seule nuance est que le premier paradoxe concerne le mouvement relatif — Achille et la tortue — alors que le deuxième se rapporte au mouvement absolu.

Jeux de miroirs

Pour être plus concret, passons à un parcours de lumière qui rebondit sur des miroirs.

Nous avons une succession de miroirs perpendiculaires, dont la taille décroît progressivement d'un facteur 2 pour le premier modèle, ou des miroirs parallèles dont l'espacement décroît progressivement d'un facteur 2 pour le second modèle. Un faisceau de lumière tombe sur le premier miroir, et est alors réfléchi vers le second miroir. Une deuxième réflexion a lieu sur le second miroir et ainsi de suite : la « particule » de lumière doit atteindre « la fin » au bout d'un certain temps, un temps fini d'après le raisonnement ci-dessus. L'ennui est qu'il n'y a pas de dernier miroir, puisqu'il s'agit d'une

configuration infinie. On peut donc suivre Zénon en disant que le monde de la physique est constitué d'entités divisibles indéfiniment.



Deux configurations de miroirs ; les trajets de la lumière sont en pointillé

La flèche de Zénon

Poursuivons le travail de Zénon par le paradoxe de la flèche. Il s'énonce en termes sibyllins : « si toute chose est soit au repos soit en mouvement lorsqu'elle occupe un volume égal au sien, alors un objet qui se déplace est dans l'instant ; une flèche en mouvement est au repos ».

La flèche de Zénon n'est pas un concept simple puisqu'il faut d'abord comprendre ce qu'il a voulu dire. Reprenons les termes mêmes du paradoxe.

Au repos, une flèche occupe une place, un volume.

Lorsqu'elle est en mouvement, la flèche occupe toujours à tout instant un espace égal à son volume.

Zénon en conclut qu'à tout instant de son mouvement, la flèche est au repos et que le mouvement n'a pas de réalité physique.

Aristote a réfléchi au problème. Sa solution repose sur l'idée que le temps est composé d'instants indivisibles au cours desquels il n'y a ni repos, ni mouvement.

La faiblesse du raisonnement réside dans cette négation du mouvement. Le mouvement n'a effectivement pas de sens si on s'intéresse à un instant donné, le mouvement n'a de sens que sur un intervalle de temps, comme le révèle la notion de vitesse instantanée. La vitesse instantanée peut être définie comme la limite du rapport de la distance parcourue et du temps mis à parcourir la distance considérée, lorsque les intervalles de temps et d'espace tendent vers zéro (ou deviennent aussi petits que possible). Pour étudier le mouvement, il faut donc faire appel à un intervalle de temps, même si celui-ci peut tendre vers zéro.

On pourrait arguer que l'idée de Zénon concerne la « durée des instants » ; mais dans ce cas les prémisses sont fausses : que signifie que l'objet est à un emplacement de sa propre taille sur un intervalle de temps ? À moins que dans l'esprit de nos anciens philosophes il y ait confusion entre les instants et les intervalles de temps.

Mais cette confusion entre le temps et les intervalles de temps est possible et souvent fréquente. Lorsque vous vous interrogez et vous dites : « Quand cela a-t-il commencé ? » Cela veut-il dire « à quel instant ? » ou alors « depuis combien de temps¹ ? »

Zénon poursuit son raisonnement et sa réflexion sur le mouvement. On croit que la flèche se déplace de l'arc vers la cible ; mais, à chaque instant pris isolément, la flèche occupe une position donnée : on peut donc considérer qu'elle est immobile ; et, si elle est immobile à chaque instant, elle est toujours immobile.

Ce troisième paradoxe est probablement le plus délicat à réfuter : en effet, la durée du mouvement se compose d'une infinité d'instantanés ; si à chaque instant la flèche est immobile, que peut bien être le mouvement ? Le paradoxe naît de l'image fautive suggérée par la phrase « la durée se compose d'une infinité d'instantanés » : on imagine en effet une succession d'instantanés.

Or, la durée ne se décompose pas en une infinité d'instantanés de même que le segment ne se décompose pas en une infinité de points, la durée se décompose en une infinité d'intervalles de temps, l'espace en une infinité d'intervalles d'espace : on ne peut donc pas davantage définir l'instant « suivant » un instant donné que l'on ne peut imaginer, sur un segment, le point « consécutif » à un point donné.

On dit que le temps, l'espace, sont des continus : le paradoxe de la flèche est une exposition ingénieuse du problème que pose cette notion de « continuité ».

Les paradoxes de Zénon sont à l'origine des différentes conceptions de la notion d'infini : on peut considérer que ce sont les discussions nées de ces paradoxes qui ont abouti à la théorie des ensembles formulée en particulier au XIX^e siècle, par Georg Cantor.

Si le temps et l'espace² sont constitués d'instantanés et de positions insécables, une flèche est à chaque instant t_n en un emplacement déterminé

1 C'est la différence entre « quand le match de foot a-t-il eu lieu ? » et « quand le match de foot a-t-il commencé ? »

2 Dans le monde macroscopique, l'espace et le temps sont des concepts parfaitement séparés

e_n . À l'instant t_{n+1} suivant, elle devra être en e_{n+1} : ceci n'est pas possible car pour passer de e_n à e_{n+1} , il lui faut un *certain* temps. Or entre t_n et t_{n+1} , il n'y a, par hypothèse, aucun instant.

Si, désormais, l'espace est divisible à l'infini, la flèche devra d'abord parcourir la moitié de la distance qui la sépare de la cible, puis la moitié de la distance restante et ainsi de suite car la moitié d'une distance non nulle ne sera jamais nulle.

Ainsi, dans les deux hypothèses, la flèche n'atteindra pas la cible. Ici, on voit bien que les arguments de Zénon conduisaient à des impasses. Les continuistes et les atomistes n'avaient pas fini d'en découdre.

Il n'y a pas de mouvement ■

Zénon ne s'arrête pas en si bon chemin : la notion de mouvement n'a pas de sens.

Si deux athlètes courent en sens inverse sur un stade et passent au même instant devant un spectateur immobile, pour l'un des athlètes, l'autre coureur est deux fois plus rapide que pour le spectateur : la vitesse de l'athlète est ainsi égale à son propre double ; ce qui montre que la notion de « vitesse », et par suite, la notion de mouvement n'a pas de sens.

Vous-même, vous en faites l'expérience dans la gare, lorsque vous voyez par la fenêtre du wagon le train d'à côté bouger. Ne vous êtes-vous jamais demandés alors durant une seconde si c'était vous et votre train qui démarriez ou le train d'à côté qui démarrait ? La conclusion est que le mouvement est relatif. Vous bougez par rapport au train d'à côté. Seule cette assertion a du sens : le mouvement est donc relatif.

On doit accepter l'idée que dans cette conception, pourtant vieille de deux mille ans, Zénon a mis le doigt sur la relativité.

La relativité restreinte einsteinienne, associe temps et espace et considère qu'il est impossible de parler d'espace dans l'absolu. Pour un objet en mouvement le monde est différent, et pour le monde, le mouvement de l'objet le rend différent. Le plus surprenant dans cette histoire est qu'au cours des vingt derniers siècles, ce paradoxe de Zénon n'ait inspiré aucun physicien sur la relativité des mouvements.

et distincts. En relativité, il n'en est rien. Lorentz s'est rendu compte à la fin du XIX^e siècle qu'il existe des relations associant temps et espace, permettant de rendre certaines relations invariantes, c'est-à-dire écrites de la même manière quel que soit le référentiel d'étude. Voir le chapitre 6 sur la relativité.

Zénon a été encore plus fort pour son quatrième paradoxe. Il évoque la vitesse limite. Il dit : « Imaginons une personne qui se dirige vers l'Est à la vitesse maximale, et qu'une autre personne fasse de même vers l'Ouest. On peut dire qu'elles s'approchent l'une de l'autre à la vitesse relative double. Or cela est en totale contradiction avec la proposition initiale de vitesse relative maximale ».

Là encore, on doit reconnaître que Zénon soulève un problème crucial de la relativité. La composition des vitesses, c'est-à-dire la manière dont s'ajoute les vitesses, pour des vitesses proches de la vitesse maximale est plus complexe qu'une simple somme ! Les paradoxes s'avèrent donc très productifs du point de vue conceptuel.

Et un cinquième !

Tout cela est fort complexe, mais ne dites surtout pas que « la probabilité que je comprenne, tend singulièrement vers 0 » car alors c'est le cinquième paradoxe de Zénon que vous énonceriez.

Un événement peut-il survenir alors qu'il n'a aucune chance de l'être ? Imaginons notre ami Achille, excellent archet, tirant une flèche vers une cible fixée sur un mur. La probabilité que la flèche atteigne la cible est proportionnelle au rapport de la surface de la cible sur la surface totale¹. Il faut que la flèche vise au moins la moitié de l'aire, puis la moitié de la moitié, puis, etc. On arrive de proche en proche au paradoxe d'Achille et de la tortue : la probabilité d'atteindre la cible est vraiment nulle. Pourtant, notre habile archet réussira son exploit.

Donc lorsque vous affirmez ne rien y « comprendre », vous avez toutes les chances d'avoir tout compris. Bravo !

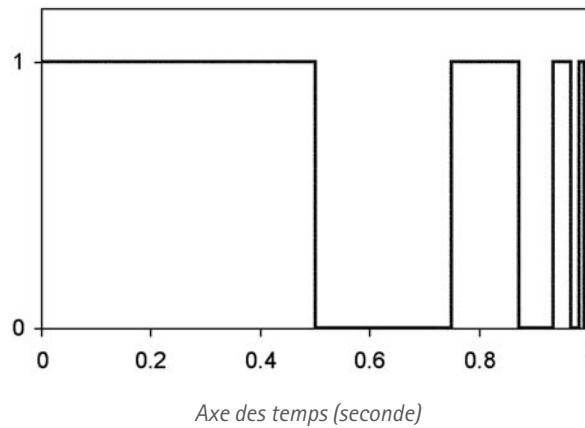
La lampe de Thomson, les balles de tennis

Dans la même veine, proposons d'autres paradoxes sur des lampes qui s'allument et puis qui s'éteignent.

On considère une lampe qui s'allume (état 1) pendant 1/2 seconde, puis s'éteint (état 0) pendant 1/4 seconde, puis s'allume à nouveau pendant 1/8 de seconde, puis s'éteint pendant 1/16 de seconde, etc.

¹ Ainsi, plus la surface de la cible est grande, plus il y a de chance d'atteindre la cible ! Il est très difficile de rater avec une flèche un éléphant dans un couloir !

Au bout d'une seconde, la lampe est-elle allumée ou éteinte¹ ?



Il y a une variante encore plus troublante.

Celle-ci utilise des balles de tennis. On dispose d'une pièce et d'une infinité de balles de tennis numérotées (1, 2, 3, etc.).

Au premier coup, au temps $t = 0$, on envoie la balle n° 1 et 2 dans la pièce.

Au deuxième coup, au temps $t = 1/2$, on envoie les balles 3 et 4 dans la pièce, on retire la balle 1.

Au troisième coup, au temps $t = 1/2 + 1/4 = 3/4$, on envoie les balles 5 et 6, et on fait ressortir la balle 2.

Etc.

Combien y a-t-il de balles dans la pièce au temps $t = 1$?

Première solution : à $t = 1$, il y a une infinité de balles dans la pièce. En effet, à chaque étape, le nombre de balles dans la pièce augmente de 1. Donc au bout d'une infinité d'étapes, il y a une infinité de balles.

Deuxième solution : à $t = 1$, il y a zéro balle dans la pièce ! En effet : si vous pensez qu'il y en a une, quel est son numéro ? À un moment donné du processus, cette balle a été retirée, et n'a plus jamais été remise. Par exemple la balle 2 a été retirée au troisième coup, la balle n au $n+1$ coup, toutes les balles ont été retirées à un certain moment. Donc il n'y en a plus !

¹ Nous ne nous intéressons pas à l'aspect physique de la problématique consistant à dire qu'à la limite l'opération n'est pas possible car ces opérations « physiques » ne peuvent pas être considérées comme instantanées. De plus, la lampe est supposée idéale et ne grille pas lors de cette expérience.

Ce qui est troublant ici, c'est que nous avons deux raisonnements qui ont l'air parfaitement convaincant, mais qui conduisent à deux résultats contradictoires !

En fait ce paradoxe est d'une toute autre nature que celui de Zénon, même s'il utilise aussi la série convergente $1/2+1/4+1/8+1/16+\dots$. En effet, dans celui de Zénon, on a un « processus » qui est parfaitement bien défini pour tout temps t . On peut ainsi faire le graphe de la distance parcourue par la flèche par rapport au temps, et c'est une courbe continue. Les instants définis par Zénon forment une suite de points sur l'axe des t , qui tend vers 1. Or ce qui se passe au temps $t = 1$ est parfaitement bien défini.

Dans le paradoxe de la lampe, il en va tout autrement. Si on fait un graphe avec t en abscisse, et une variable Y en ordonnée qui vaut 0 quand la lampe est éteinte et 1 quand elle est allumée, que se passe-t-il ? On a un graphique qui est défini pour t compris entre 0 et 1 strictement, et qui n'est pas continu au point $t = 1$. Ainsi, il n'y a pas de moyen naturel de prolonger ce graphe en $t = 1$, ce que demande l'énoncé du paradoxe ! On peut aussi bien prendre 0 que 1 en ce point, c'est une question de choix. Le problème dans l'énoncé du paradoxe a pour origine le mot « etc. » car nous sous-entendons que le processus qui allume et éteint la lampe est bien défini pour tout temps, or ce n'est pas le cas : à partir de $t = 1$, il n'y a plus « d'instruction ».

Pour le paradoxe des balles de tennis, le processus est le même : on a deux fonctions du temps : l'une qui donne le minimum de balles présentes dans la pièce, l'autre qui donne le nombre de balles présentes dans la pièce. Ces deux fonctions ne sont pas définies en $t = 1$, mais il est vrai qu'elles tendent toutes les deux vers l'infini en ce point. C'est ce que sous-tendent les deux raisonnements « qui ont l'air vrai ». Vous savez bien, « qu'avoir l'air » cela ne suffit pas.

Vous pourriez croire que l'échappatoire est facile. Alors nous vous proposons le paradoxe d'Achille et les dieux.

Revenons donc à Achille qui souhaite faire la navette entre deux contrées. Mais le Grec soumis aux dieux, accepte toutes leurs décisions. Le premier dieu paralyse le coursier après qu'il ait parcouru la moitié de la distance, le deuxième le paralyse dès qu'il parcourt le quart, le troisième dès qu'il atteint le huitième du parcours restant, etc. Si on utilise le principe de dichotomie à l'envers, Achille ne pourra même pas commencer sa course, à défaut, il se mettrait en désobéissance aux dieux. Voyez-vous la faille du raisonnement ? Non ? En fait, ce raisonnement ne tient qu'à partir du moment où Achille commence son parcours pour être paralysé par le premier dieu.

Revenons à Achille dans une autre configuration. On suppose qu'il parcourt pendant une demi-minute à une certaine vitesse une ligne droite, puis un quart de minute avec une vitesse double, etc. Où se trouvera notre intrépide Grec à la fin de la minute ? À distance infinie ? Mais l'infini a-t-il un sens dans ces paradoxes ?

Compliquons quelque peu nos histoires ; il s'agit de faire vivre maintenant trois personnages : Franck, Jacky et un petit oiseau des îles. Franck et Jacky se dirigent l'un vers l'autre et l'oiseau fait la navette entre les deux garçons. Dès que l'oiseau atteint un garçon, il fait demi-tour et se dirige alors vers l'autre. Question : où se situe l'oiseau et vers lequel des deux enfants se dirige-t-il au point de rencontre des enfants ?

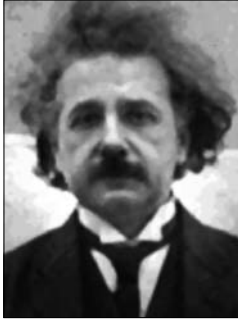
Pour ceux qui ne voient pas la réponse, nous donnons la solution. L'oiseau peut se trouver n'importe où car on peut inverser les processus. Le problème est symétrique par rapport aux enfants, dès lors, peu importe le point de départ de l'oiseau, son arrêt aura lieu au même endroit, après un parcours ayant la même durée.

Pourtant, il faut conclure !

Pour conclure, nous allons retourner l'arme de Zénon contre son propre raisonnement. En effet, on peut utiliser son argument dans le contexte du mouvement continu (ou des fonctions continues) pour lequel, même dans un atome de temps, il n'y a aucune différence entre le repos et le mouvement. Ainsi, Zénon suggère que si le temps est composé d'instants (aussi bien dans le modèle continu que dans le modèle discontinu), aucun mouvement n'existe. Avec nos mots d'aujourd'hui (et nos connaissances mathématiques), on pourrait argumenter que même si la valeur d'une fonction $f(t)$ est constante en un instant t_0 , c'est-à-dire $f(t_0) = \text{constante}$ (une valeur connue), la fonction elle-même peut prendre n'importe quelle valeur à un instant quelconque. Malheureusement, cet argument ne suffit pas à tout balayer. Une fonction continue est une sorte d'entité « statique », il en découle (comme le disent les Parménides) que « la notion de mouvement n'existe pas et qu'il s'agit d'une illusion de nos sens, ayant pour fondement notre approche anthropomorphe (intuitive) d'un monde statique ».

Aujourd'hui avec la mécanique quantique, nous savons qu'il existe des grandeurs incompatibles entre elles, dans le sens que l'on ne peut déterminer avec une infinie précision les unes et les autres. Il en est ainsi de la vitesse et de la position, de l'énergie et de la durée. Ces indéterminations de Heisenberg développées dans le livre sur l'Espace et le Temps (dans la collection « Physique pour tous », éditions Ellipses) montrent, s'il en est

besoin, l'intérêt des questionnements de Zénon, et la façon dont on s'est servi pendant la première moitié du XX^e siècle pour construire les bases de la mécanique quantique.



Albert Einstein
(1879-1955)

Malgré son diplôme obtenu en 1900 et une première publication sur la capillarité en 1901, son esprit indépendant et son caractère frondeur lui interdisent un poste d'assistant à l'Université. Ce n'est qu'en juin 1902, après une période de chômage, qu'il obtient le poste d'expert auprès du Bureau des brevets de Berne. Einstein fait publier deux articles dans « Annalen der Physik » qui se révèlent révolutionnaires. Le premier paraît en mars 1905. Il décrit comment l'énergie d'un corps chauffé peut se transformer en énergie lumineuse.

Cette transformation n'est possible qu'en considérant la lumière constituée de « grains » qu'Einstein appelle « quanta de lumière » (les photons). Le deuxième article paraît deux mois plus tard, en juin. Il se propose de résoudre le problème posé par l'éther, en totale contradiction avec le principe de relativité. Il énonce alors sa théorie de la relativité qui unifie les théories de la matière et de la lumière. La matière comme la lumière subissent le principe de relativité et la simultanéité de deux événements devient dépendante de l'observateur. Le temps n'est plus un concept invariant et est lui aussi relatif.

En septembre 1905, Einstein ajoute un post-scriptum à son article et démontre la célèbre formule $E = mc^2$, induisant une équivalence entre la masse et l'énergie¹.

Peut-on après ce long développement, affirmer que nous avons résolu les paradoxes de Zénon ? Peut-être pas. Peut-être que les arguments de Zénon, à cause de leur simplicité, resteront une sorte d'écran sur lequel nous projeterons nos modèles phénoménologiques qui englobent l'espace et le temps. Deux paramètres qui nous touchent au plus haut point.

¹ Pour aller plus loin sur ce thème, nous conseillons la lecture de *Espace et temps* par l'un des auteurs, Chérif Zananiri, aux éditions Ellipses, coll. « Physique pour tous ». De plus cette relation sera discutée dans le chapitre 6 sur la relativité.