Chapitre 1

Qu'est-ce qu'un paradoxe ?

Dans ce premier chapitre, on montre sur plusieurs exemples ce que représente le paradoxe comme démarche intellectuelle ; on y parle de la divisibilité de l'espace et du temps, du continu et du discontinu, du mouvement relatif ou absolu. On termine par le paradoxe du papi assassiné dans les univers parallèles et de Franck et Jacky survolés par l'oiseau des îles.

Qu'est-ce qu'un paradoxe ? Paradoxe, du grec *para*, « à côté », et *doxa*, « opinion » est une proposition contraire à l'opinion commune.

Il s'agit donc d'une affirmation qui contient les germes apparents d'une contradiction. Souvent d'ailleurs, elle apparaît uniquement pour clarifier les idées : elle a donc une mission pédagogique.

Il faudrait pourtant distinguer les paradoxes qui ne sont qu'apparents et qui ne résistent pas à un examen minutieux, comme ceux que nous développons, des « vrais » paradoxes, qui soulèvent de réels gros problèmes.

Commençons par une histoire : l'histoire des crétois menteurs. Là, il s'agit d'un vrai paradoxe que l'on ne peut résoudre et qui montre que le système que l'on considère est inconsistant : il ne saurait exister.

Épéménide, un des habitants de Crête dit : « tous les Crétois sont des menteurs ». S'il ment, alors les Crétois ne mentent pas et il dit donc la vérité… on est face à un problème ; mais si ce qu'il dit est vrai, alors c'est un menteur puisque tous les Crétois ne sont donc pas menteurs,… on est là aussi face à un problème. Il y a contradiction, donc paradoxe. Le problème a longuement intrigué les philosophes ; au XIVe siècle un certain Buridan développe une solution qui consiste à dire que chaque proposition contient par sa formulation une vérité qui se réfère à la première donnée. Ainsi, si la proposition originale sous-entend qu'elle est elle-même fausse, cela veut dire qu'elle est vraiment fausse.

On vous propose des éléments de réflexion

Vous rencontrez une personne susceptible de mentir, par exemple, soit une Franche, soit une Vile (comme les noms l'indiquent, il y a une personne qui ment et l'autre disant la vérité) et vous lui demandez « êtes-vous Franche ? » Que répond-elle ?

Vous avez assez réfléchi pour trouver la solution ?

Elle répondra toujours oui.

Compliquons cette devinette. Si maintenant vous croisez deux personnes dont l'une vous dit : « nous sommes des Viles », qu'en déduisez-vous ?

Si c'est une Franche qui a parlé, disant toujours la vérité, elles seraient toutes deux Viles. Celle qui parle est donc Vile et par conséquent l'autre est Franche, car toute proposition faite par une Vile est fausse. Encore une fois, on peut accéder à la bonne réponse en dépit des mensonges et le paradoxe est levé.

Vous voyez, cela n'est pas si simple, car si nous disons : « j'affirme que cette phrase est fausse », on ne sait même pas si c'est juste ou faux. Car si la proposition est vraie, alors elle est fausse, et si la proposition est fausse, son contraire devrait être vrai. C'est un peu ce qui s'est passé dans *Star Trek*. Lors d'un des épisodes, le capitaine Kirk devait défier un androïde en disant qu'il mentait tout le temps ; il a ajouté ensuite : « je mens ». Cela a tué l'androïde.

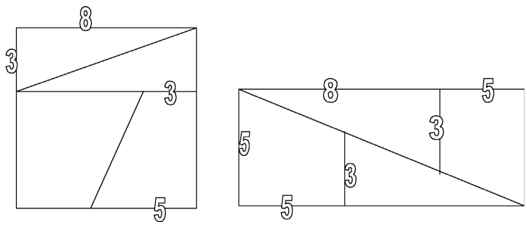
Ce type de raisonnement fait assez souvent intervenir des boucles dans la démarche ; on appelle ce type de boucle, l'autoréférence. Mais il arrive que le travail en boucle soit vain. Ainsi, comment comprendre le paradoxe du barbier qui rase toutes les personnes de la ville, mais qui ne se rase pas lui-même (le barbier est en fait une « barbière ») ? Autre exemple laissé à votre sagacité : où se trouve la clef du paradoxe dans le raisonnement suivant « un cheval à un euro est rare parce que bon marché, et donc cher puisque tout ce qui est rare est cher ? ».

Théorie des ensembles

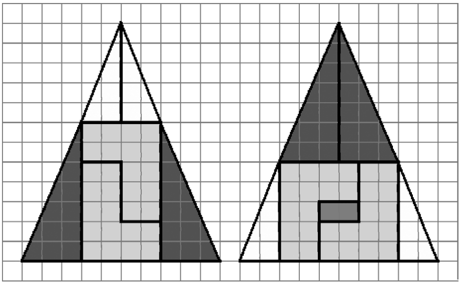
Prenons comme autre exemple, le paradoxe de Bertrand Russell formulé en 1901. Le problème revient à se poser la question de savoir si l'ensemble de tous les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes est compris dans lui-même ou non. La première hypothèse est qu'il ne s'inclut pas lui-même, mais alors il doit s'inclure lui-même, puisqu'il comprend tous les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes. La seconde hypothèse est qu'il s'inclut lui-même, mais cela implique alors une impossibilité, puisqu'il n'inclut que les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes. Le paradoxe, c'est donc qu'il doit s'inclure lui-même (il inclut tous les ensembles) et qu'il ne doit pas s'inclure lui-même (il n'inclut que ceux qui ne s'incluent pas eux-mêmes). Or, selon le principe de non-contradiction, on ne peut pas avoir A et non A en même temps. Pourtant, ici, c'est le cas : la première et la deuxième hypothèse coexistent. Or si la première est vraie, alors la seconde est fausse, et inversement. Donc le paradoxe implique que le vrai est faux et le faux vrai. Il constitue un problème insoluble. Il semble signifier l'inexistence de la vérité. Mais est-ce véritablement le cas ?

En fait, il existe bien une vérité : celle que recèle la « résolution » du paradoxe par Russell lui-même. C'est ce qui apparaît si l'on se penche sur la théorie des types, élaborée par ce dernier. Celle-ci consiste à poser qu'un ensemble doit toujours être d'un type supérieur au type de ses éléments. Il existe ainsi une hiérarchie de types ou de niveaux, selon laquelle toute entité appartient à un type et un seul, et de plus une propriété ne peut être attribuée à une entité que si cette entité est du type immédiatement inférieur au type de la propriété. Le type 0 correspondra alors à tous les individus, le type 1 à toutes les propriétés d'individus, le type 2 à toutes les propriétés de propriétés d'individus, le type 3…, ainsi de suite, à l'infini. Si bien que l'ensemble de tous les ensembles devrait être d'un type supérieur à lui-même (puisqu'il est à la fois ce qui inclut et ce qui est inclus). D'où la conclusion de Russell, qui est que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. En d'autres termes, l'ancienne définition de l'ensemble, celle de Cantor (selon laquelle un ensemble est ce qui rassemble des éléments sous une même propriété, par exemple « inclure les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes »), est fausse.

On vous propose ce paradoxe à la fois géométrique et « visuel » que Lewis Carol a conçu. Il est parti d'un carré de côté 8 et l'a découpé comme l'indique la figure ci-dessous, puis l'a reconstitué. L'aire du premier est 64 alors que celle de la deuxième construction est 65. On en déduit naïvement que 64 = 65. Il y a bien entendu une supercherie. Elle est strictement visuelle, car le carré de départ ne se reconstitue pas en un rectangle ; il manque un petit triangle dont l'aire est égale à l'unité.



Le paradoxe géométrique et pseudo visuel de Lewis Carol



Le triangle de Curry révèle ce que masque le paradoxe de Lewis.
Les deux triangles n'ont pas mêmes aires.

Maintenant que nous avons touché du doigt la nature de certains paradoxes, forts de ces éléments, nous sommes en mesure d'aller plus loin. Parlons d'Achille et de la tortue.

Achille et la tortue, les deux premiers paradoxes de Zénon

Nous allons suivre le raisonnement de Zénon d'Élée. D'après le raisonnement de Zénon, Achille, le célèbre et rapide Achille ne pourra jamais rattraper la lente tortue. « Quelle tortue me direz-vous ? » Patientez, commençons par le début, c'est-à-dire par l'École de philosophie d'Élée.

Cette école de pensée a été fondée par des poètes tels que Xénophane, né six siècles avant Jésus-Christ. Les maîtres enseignent que l'univers est singulier, éternel et immuable. « Le tout est un » disent-ils ! Il s'ensuit que tout est illusion, y compris le mouvement.

Peu de temps après, un autre philosophe se distingue : Parménide. Il croit à l'unité et à la constance de la réalité ; il insiste sur le fait que les perceptions et les opinions ne sont pas des faits. Zénon est son élève. Ce qui nous reste de lui, fait partie des traditions orales qu'ont laissées les philosophes grecs. Ce qui veut aussi dire qu'il ne nous reste aucun écrit de sa main.

À l'époque, deux conceptions s'affrontaient chez les Grecs : les uns pensaient que l'espace était discret, les autres qu'il était continu. Si l'espace est discret, alors il est possible de le découper en autant de parties que nous pouvons l'imaginer mais l'on finit par arriver à un espace élémentaire, indivisible, une sorte d'« atomes d'espace ». Si l'espace est continu, alors, aussi loin que nous allons, nous pouvons le diviser, jusqu'à l'infini. Tout élément d’espace est divisible. Comme Zénon refusait les deux positions, il a imaginé ses paradoxes.

L’apport principal de Zénon a été de montrer comment on peut arriver à des conclusions absurdes à partir de raisonnements apparemment bien construits. Zénon savait bien que les flèches atteignent les cibles, que le plus rapide rattrape le plus lent, mais il nous a laissé une image de l’idée que se faisaient les Grecs de ces deux concepts d’espace et de temps.

Commençons par le paradoxe le plus simple (et sans doute le plus célèbre), parlons d’Achille et de la tortue.

Considérons donc Achille, le plus rapide des guerriers grecs, obligé de concourir avec une tortue. Il est raisonnable de donner un handicap au Grec : la lente tortue partira plus tôt. Zénon prétend que quelle que soit la vitesse du héros grec, il ne pourra jamais rattraper la tortue. En effet, lorsqu’Achille atteint le point où se trouvait la tortue, celle-ci a déjà quitté son emplacement d’origine et se trouve un peu plus loin. La deuxième étape se déroule dans les mêmes conditions, Achille court vers le nouvel endroit où est la tortue et encore une fois, Achille n’atteint pas l’animal, qui a avancé entre-temps et ainsi de suite. Il pourra toujours réduire l’avance, mais jamais il ne touchera la queue de l’animal.

Le deuxième paradoxe, de la même nature que le premier, est le « paradoxe de dichotomie ».

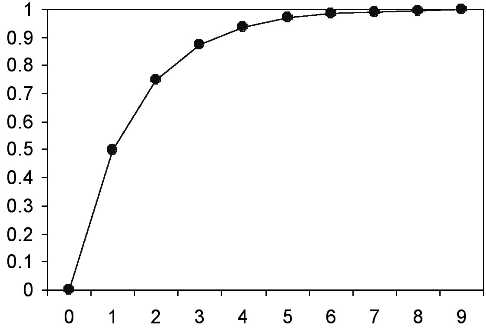
Achille, encore lui, souhaite se rendre au village voisin distant de d. Au préalable, il effectue la moitié du parcours, il lui reste donc d/2. Arrivé à mi-parcours, on reprend le raisonnement pour dire qu’il fait d’abord d/4, et ainsi de suite. Il a donc une somme infinie de parcours à effectuer. Par conséquent, il faut effectuer un trajet infini, qui ne peut se parcourir qu’en un temps infini. On peut en conclure qu’il n’arrivera jamais à destination.

Malheureusement, ces raisonnements sont faux : une somme infinie de termes ne donne pas nécessairement l’infini, en tout cas pas ici.

Intéressons-nous de plus près à la somme des termes :

1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 +…

Nombre de termes	Total de la somme
4	1/2+1/4+1/8+1/16 = 0,875
5	1/2+1/4+1/8+1/16+1/32= 0,908
6	1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64=0,921



Nombre de pas d'Achille

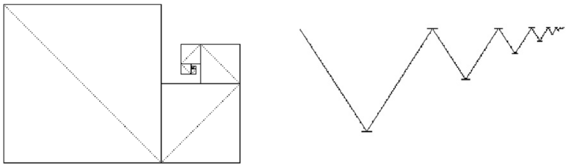
Si vous vérifiez le total sur une calculatrice, vous trouverez qu'au fur et à mesure que le nombre de termes de la somme augmente, le résultat tend vers 1. Vous voyez, le physicien dira qu'Achille rattrape la tortue car la série converge vers 1. Le sens commun est trompé par l'assertion suivante qui est fausse : « une somme infinie de terme donne un résultat infinie », d'où le paradoxe.

Il faut se rendre compte que ces paradoxes ont pour but de critiquer les notions de mouvement continu et mettent en lumière les notions de divisibilité de l'espace et du temps. La seule nuance est que le premier paradoxe concerne le mouvement relatif — Achille et la tortue — alors que le deuxième se rapporte au mouvement absolu.

Jeux de miroirs

Pour être plus concret, passons à un parcours de lumière qui rebondit sur des miroirs.

Nous avons une succession de miroirs perpendiculaires, dont la taille décroît progressivement d'un facteur 2 pour le premier modèle, ou des miroirs parallèles dont l'espacement décroît progressivement d'un facteur 2 pour le second modèle. Un faisceau de lumière tombe sur le premier miroir, et est alors réfléchi vers le second miroir. Une deuxième réflexion a lieu sur le second miroir et ainsi de suite : la « particule » de lumière doit atteindre « la fin » au bout d'un certain temps, un temps fini d'après le raisonnement ci-dessus. L'ennui est qu'il n'y a pas de dernier miroir, puisqu'il s'agit d'une configuration infinie. On peut donc suivre Zénon en disant que le monde de la physique est constitué d'entités divisibles indéfiniment.



Deux configurations de miroirs ; les trajets de la lumière sont en pointillé

La flèche de Zénon

Poursuivons le travail de Zénon par le paradoxe de la flèche. Il s'énonce en termes sibyllins : « si toute chose est soit au repos soit en mouvement lorsqu'elle occupe un volume égal au sien, alors un objet qui se déplace est dans l'instant ; une flèche en mouvement est au repos ».

La flèche de Zénon n'est pas un concept simple puisqu'il faut d'abord comprendre ce qu'il a voulu dire. Reprenons les termes mêmes du paradoxe.

Au repos, une flèche occupe une place, un volume.

Lorsqu'elle est en mouvement, la flèche occupe toujours à tout instant un espace égal à son volume.

Zénon en conclut qu'à tout instant de son mouvement, la flèche est au repos et que le mouvement n'a pas de réalité physique.

Aristote a réfléchi au problème. Sa solution repose sur l'idée que le temps est composé d'instants indivisibles au cours desquels il n'y a ni repos, ni mouvement.

La faiblesse du raisonnement réside dans cette négation du mouvement. Le mouvement n'a effectivement pas de sens si on s'intéresse à un instant donné, le mouvement n'a de sens que sur un intervalle de temps, comme le révèle la notion de vitesse instantanée. La vitesse instantanée peut être définie comme la limite du rapport de la distance parcourue et du temps mis à parcourir la distance considérée, lorsque les intervalles de temps et d'espace tendent vers zéro (ou deviennent aussi petits que possible). Pour étudier le mouvement, il faut donc faire appel à un intervalle de temps, même si celui-ci peut tendre vers zéro.

On pourrait arguer que l'idée de Zénon concerne la « durée des instants » ; mais dans ce cas les prémisses sont fausses : que signifie que l'objet est à un emplacement de sa propre taille sur un intervalle de temps ? À moins que dans l'esprit de nos anciens philosophes il y ait confusion entre les instants et les intervalles de temps.

Mais cette confusion entre le temps et les intervalles de temps est possible et souvent fréquente. Lorsque vous vous interrogez et vous dites : « Quand cela a-t-il commencé ? » Cela veut-il dire « à quel instant ? » ou alors « depuis combien de temps[1] ? »

Zénon poursuit son raisonnement et sa réflexion sur le mouvement. On croit que la flèche se déplace de l'arc vers la cible ; mais, à chaque instant pris isolément, la flèche occupe une position donnée : on peut donc considérer qu'elle est immobile ; et, si elle est immobile à chaque instant, elle est toujours immobile.

Ce troisième paradoxe est probablement le plus délicat à réfuter : en effet, la durée du mouvement se compose d'une infinité d'instants ; si à chaque instant la flèche est immobile, que peut bien être le mouvement ? Le paradoxe naît de l'image fausse suggérée par la phrase « la durée se compose d'une infinité d'instants » : on imagine en effet une succession d'instants.

Or, la durée ne se décompose pas en une infinité d'instants de même que le segment ne se décompose pas en une infinité de points, la durée se décompose en une infinité d'intervalles de temps, l'espace en une infinité d'intervalles d'espace : on ne peut donc pas davantage définir l'instant « suivant » un instant donné que l'on ne peut imaginer, sur un segment, le point « consécutif » à un point donné.

On dit que le temps, l'espace, sont des continus : le paradoxe de la flèche est une exposition ingénieuse du problème que pose cette notion de « continuité ».

Les paradoxes de Zénon sont à l'origine des différentes conceptions de la notion d'infini : on peut considérer que ce sont les discussions nées de ces paradoxes qui ont abouti à la théorie des ensembles formulée en particulier au XIXe siècle, par Georg Cantor.

Si le temps et l'espace[2] sont constitués d'instants et de positions insécables, une flèche est à chaque instant t_n en un emplacement déterminé

1 C'est la différence entre « quand le match de foot a-t-il eu lieu ? » et « quand le match de foot a-t-il commencé ? »

2 Dans le monde macroscopique, l'espace et le temps sont des concepts parfaitement séparés