PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques PSI/PSI*

ouvrage coordonné par
Christian RIEFFEL
Professeur au lycée L. Armand (Poitiers)

Michel GOUMI
Professeur au lycée E. Perrier (Tulle)
Ivan GOZARD
Professeur au lycée Carnot (Dijon)
Bertrand HAUCHECORNE
Professeur au lycée Pothier (Orléans)
Olivier LEUCK
Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)

ellipses

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Compléments indispensables du cours, elles l'éclairent et l'illustrent.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

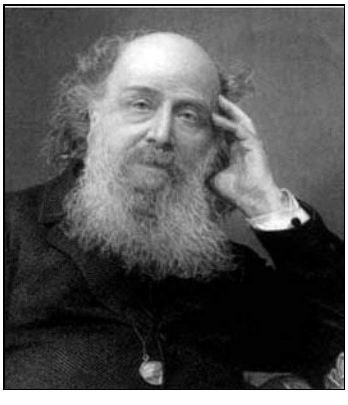
Ainsi l'ouvrage de maths comme celui de physique-chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Chapitre 2
Rappels et compléments sur les matrices

Les matrices apparaissent en mathématiques avec James **Sylvester** en 1850 mais c'est Arthur **Cayley** qui, peu après, définit les opérations d'addition et de multiplication, les traitant ainsi comme des nombres et non des tableaux de nombres. Pourtant, le mot *matrice* est ancien dans la langue française puisqu'il apparaît au XIII^{e} siècle. Construit sur le latin *mater*, *mère* il est d'abord un synonyme d'*utérus*. Cependant, comme on enregistrait les enfants à la naissance, il désigna bientôt le registre sur lequel on les inscrit. Ceci explique les mots *matricule* et *immatriculation*. Avec les débuts de l'imprimerie, *matrice* se met à désigner le moule sur lequel on place les caractères. Cayley s'en inspire pour nommer ces tableaux de nombres sur lesquels il travaille.



James Sylvester
1814-1897

Objectifs

Les incontournables

- ▷ Savoir calculer le rang d'une matrice, et reconnaître une matrice de rang 1.
- ▷ Savoir utiliser et interpréter la multiplication matricielle.
- ▷ Connaître les propriétés de l'algèbre (M_n (**K**), +, ,.).
- ▷ Savoir traduire matriciellement la définition vectorielle d'une application linéaire (et réciproquement).
- ▷ Savoir vérifier l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse.
- ▷ Savoir résoudre un système linéaire.
- ▷ Connaître les formules de changement de base.
- ▷ Connaître les propriétés de la trace.
- ▷ Connaître et savoir utiliser la formule donnant les coefficients du produit de deux matrices.

Et plus si affinités…

- ▷ Savoir écrire un système d'équations linéaires caractérisant Vect (u_1 , ..., u_n).
- ▷ Savoir déterminer le rang d'un système linéaire en utilisant des matrices.

Résumé de cours

Le corps de base est $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. n, p et q sont des entiers naturels non nuls.
On suppose connues les notions de matrice, d'addition de deux matrices, de multiplication d'une matrice par un scalaire et de transposition d'une matrice.
Les matrices seront notées à l'aide de lettres majuscules (A, B, M,...). Sauf précision contraire, l'élément de la ligne i et de la colonne j d'une matrice sera désigné par la lettre minuscule correspondante indexée par i et j. Dans le cas d'une opération, cet élément pourra être noté sur le modèle $(A.B)_{ij}$.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes dont les coefficients sont dans $\mathbf{K}$.

Proposition 2.1.— $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,\ )$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition : Matrices élémentaires —. *Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont les matrices E_{ij} de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1 :*

$$E_{ij}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array}\\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Soit $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!].[\![1,p]\!]}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a :

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}E_{ij}$$

La famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!].[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. C'est aussi une famille libre.

Proposition 2.2.— Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ —. La famille des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est une base, dite ***base canonique***, de cet espace vectoriel.

Corollaire 2.3.— Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ —. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,.)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension np.

Définition : Produit de deux matrices —. *Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on définit la matrice $A.B\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par :*

$$\boxed{\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\quad (A.B)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}.b_{kj}}$$

Remarque : Le produit matriciel n'est pas une opération commutative. Plusieurs constatations conduisent à cette conclusion :
▸ lorsque $n\neq q$, le produit $B.A$ n'est pas réalisable;

▸ si $n = q$, $B.A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, alors que $A.B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$;
▸ si $n = p = q$, il est facile de trouver A et B telles que : $A.B \neq B.A$.

Exemple : Le produit des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ suit la règle :

$$\forall\,(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4,\ E_{ij}.E_{kl} = \delta_j^k\, E_{il},$$

où δ_j^k, symbole de Kronecker, vaut 1 si $j = k$, 0 sinon.

On a donc, si $i \neq l$, $E_{ij}.E_{jl} = E_{il}$ et $E_{jl}.E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.

À l'occasion de cet exemple, on a mis en évidence des matrices « diviseurs de zéro », c'est-à-dire des matrices non nulles dont le produit est nul. Il est donc possible d'avoir $A.B = 0_{\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})}$, sans avoir $A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ ou $B = 0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})}$.

Théorème 2.4.— Propriétés du produit de matrices —. Soit A, B, C des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$. Pourvu que les produits et sommes ci-dessous soient bien définis, on a, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$:

1. $A.(B.C) = (A.B).C$
2. $A.(\lambda\, B + \mu\, C) = \lambda\, A.B + \mu\, A.C$
3. $(\lambda\, A + \mu\, B).C = \lambda\, A.C + \mu\, B.C$
4. ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$
5. $\lambda(A.B) = (\lambda A).B = A.(\lambda B)$
6. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors $I_n.A = A.I_p = A$
7. $A.0 = 0$ et $0.A = 0$
8. $\overline{A.B} = \overline{A}.\overline{B}$.

■ Matrices carrées

Théorème 2.5.— $\big(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, .\big)$ est un anneau (non commutatif lorsque $n \geqslant 2$).

Définition : Puissances successives d'une matrice —. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On définit les* ***puissances successives*** *de A par récurrence :*

$$\boxed{\begin{cases} \blacktriangleright\ A^0 = I_n \\ \blacktriangleright\ Miseforall\, k \in \mathbf{N},\ A^{k+1} = A.A^k \end{cases}}$$

Définition : Polynômes d'une matrice —. *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$: $P = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$. On définit pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par*

$$\boxed{P(A) = a_pA^p + a_{p-1}A^{p-1} + \cdots + a_1A + a_0\ I_n}$$

Théorème 2.6.— Formule du binôme de Newton et **identité géométrique —.** Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A.B = B.A$. Alors

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (A+B)^p & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k.B^{p-k} \\ A^{p+1} - B^{p+1} & = & (A-B).\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k.B^{p-k} \end{array}}$$

■ Matrices carrées inversibles

Théorème-Définition 2.7.— *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite* ***inversible*** *s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :*

$$\boxed{A.B = I_n \text{ et } B.A = I_n}$$

*Si elle existe, B est unique. On l'appelle l'****inverse*** *de A, et on la note $B = A^{-1}$.*

Propriétés : Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors :

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors $A.B$ est inversible et $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Théorème 2.8.— L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui sont inversibles, muni de la multiplication des matrices, est un groupe.
On l'appelle ***groupe linéaire d'ordre*** n et il est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Autres propriétés : Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:

- Si A est inversible, alors ${}^{t}A$ est inversible et $({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$.
- A est inversible si, et seulement si, elle est inversible à droite ou à gauche, c'est-à-dire s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que : $A.B = I_n$ ou s'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que : $C.A = I_n$.
  Dans ce cas, $B = C = A^{-1}$.

Pour le calcul pratique de l'inverse d'une matrice, voir la **méthode 2.1** et la **méthode 2.2**.

■ Matrices, applications linéaires et famille de vecteurs

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, ainsi que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de F.
Une application linéaire u de E dans F est entièrement définie par la donnée des vecteurs $u(e_j)$, $j \in [\![1, p]\!]$, qui sont eux-mêmes déterminés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

Définition : *On appelle* ***matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$****, et on note $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne, pour $j \in [\![1, p]\!]$, est formée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.*

Proposition 2.9.— Détermination matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire —. Soit u une application linéaire de E dans F et $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement de E et F.
Si X désigne la matrice colonne des coordonnées du vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$, si Y désigne la matrice colonne des coordonnées du vecteur y de F dans la base $\mathcal{C}$:

$$\boxed{y = u(x) \Leftrightarrow Y = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).X.}$$

Proposition 2.10.— Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ étant choisies, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ u & \mapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array}\right.$ est un **isomorphisme**.

Méthodes

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Méthode 2.1.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- On forme le système $A.X = Y$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- On résout ce système d'inconnue X.
- S'il admet une solution unique, alors A est inversible et A^{-1} est la matrice telle que : $X = A^{-1}.Y$.

Mise en œuvre : exercice 2.7, **exercice 2.8**.

Exemple : *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible ? Si oui, calculer* A^{-1}.

On répond aux deux questions en même temps. Posons : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
A.X = Y \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + + z & = & x' \\ x + y & = & y' \\ y + z & = & z' \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + + z & = & x' \\ y - z & = & -x' + y' \\ y + z & = & z' \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + + z & = & x' \\ y - z & = & -x' + y' \\ 2z & = & x' - y' + z' \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}(x' + y' - z') \\ y & = & \frac{1}{2}(-x' + y' + z') \\ z & = & \frac{1}{2}(x' - y' + z') \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthodes

❑ **Méthode 2.2.— Méthode de Jordan-Gauss —.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- On dispose côte à côte A et I_n.
- On applique à A et à I_n les mêmes opérations élémentaires *sur les lignes*, de manière à transformer A en I_n.
- Si cette transformation est possible, A est inversible et I_n a été remplacée par A^{-1}.

Les transformations élémentaires mises en œuvre peuvent aussi porter sur les colonnes, mais pas sur les lignes et les colonnes à la fois.

Mise en œuvre : exercice 2.7.

Exemple : *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *; montrer que A est inversible et calculer son inverse.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \text{ puis } L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{-1}{2} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A \text{ est donc inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■ Comment déterminer le rang d'une matrice

> ❑ **Méthode 2.3.—** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le rang de la famille des vecteurs colonnes (ou lignes) de A est parfois accessible à l'aide d'observations élémentaires.

Mise en œuvre : exercice 2.11, **exercice 2.12**.

Exemple : *Trouver le rang de la matrice* $F = (f_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *définie par :*

$$\begin{cases} f_{i,i} = 1, & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \\ f_{i,1} = 1, & \text{pour } 2 \leqslant i \leqslant n \\ f_{i,n} = 1, & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f_{i,j} = 0, & \text{pour les autres cas} \end{cases}$$

La première et la dernière colonne sont identiques, donc : $\mathsf{Rg}\,(A) \leqslant n-1$. Les $n-1$ premières colonnes forment une famille libre, donc $\mathsf{Rg}\,(A) = n-1$.

> ❑ **Méthode 2.4.— À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes**
> **1.** Les opérations élémentaires conservent le rang d'une matrice puisqu'elles se traduisent à l'aide de produits par des matrices inversibles.
>
> **2.** Les matrices $T_r = \left(\begin{array}{cccc|c} p_1 & t_{12} & \cdots & t_{1r} & \\ 0 & p_2 & \cdots & t_{2r} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \text{quelconque} \\ 0 & 0 & \cdots & p_r & \\ \hline & & 0_{n-r,r} & & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ telles que :
> $\forall\, i \in [\![1, r]\!]$, $p_i \neq 0$, sont de rang r.
> (La transposée d'une telle matrice est de rang r, puisque ses r premiers vecteurs colonnes forment une famille libre, alors que les $n-r$ derniers sont nuls).
>
> D'où la méthode qui consiste à faire subir à A une suite d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes permettant de la transformer en une matrice T_r. On a alors $\mathsf{Rg}\,(A) = r$.

Mise en œuvre : exercice 2.11.

Exemple : *Quel est le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Après les opérations élémentaires : $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{cases}$, A et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ ont le même rang.

Méthodes

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. $\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,.\big)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension np.	☐	☐
2. $\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,\times\big)$ est un anneau.	☐	☐
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.	☐	☐
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors ou bien $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A.B = I_n$, ou bien $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), B \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ et $A.B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.	☐	☐
5. Soit f un endomorphisme de E, de matrice M ; alors $\mathsf{Im}\, f$ admet pour base les vecteurs définis par les colonnes de M.	☐	☐
6. Une matrice représentative d'un isomorphisme est inversible.	☐	☐
7. Une matrice diagonale commute avec toute matrice.	☐	☐
8. La transposée de $A.B$ est ${}^{\mathrm{t}}A.{}^{\mathrm{t}}B$.	☐	☐
9. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ des matrices symétriques (telles que ${}^{\mathrm{t}}A = A$) et l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ des matrices antisymétriques (telles que ${}^{\mathrm{t}}A = -A$) sont supplémentaires.	☐	☐
10. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :$A^3 - 3\,A^2 + 2\,I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ est inversible.	☐	☐
11. Les opérations de pivot de Gauss conservent le rang de toute matrice.	☐	☐
12. L'ensemble des solutions (x,y,z,t) du système $\begin{cases} x+y-t = 0 \\ -3y+z+t = 0 \end{cases}$ est un espace vectoriel de dimension 2.	☐	☐
13. Pour tous $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ et $n \in \mathbf{N}$, $(A.B)^n = A^n.B^n$.	☐	☐
14. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \Longrightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.	☐	☐
15. Une matrice de rang 1 a toutes ses colonnes proportionnelles.	☐	☐

Énoncé des exercices

Généralités

Exercice 2.1 : 1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$?
2. On suppose que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\cos\alpha, \sin\alpha)$; montrer que la matrice de f dans la base canonique est de la forme $\begin{pmatrix} r\cos\alpha\ \sin\alpha & -r\cos^2\alpha \\ r\sin^2\alpha & -r\cos\alpha\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, où $r \in \mathbf{R}^*$.

D'après CCP

Exercice 2.2 : Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de format $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbf{K})$, est stable par multiplication.

Exercice 2.3 : Soit k un réel fixé. On pose $E = \left\{ M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & ky \\ y & x \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.
1. Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. En donner une base.
2. Résoudre dans E l'équation $X^2 = -I_2$.

Exercice 2.4* : Soit $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les termes de la diagonale sont deux à deux distincts.
1. Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commute avec D si, et seulement si, M est diagonale.
2. En déduire que M commute avec D si, et seulement si, il existe un polynôme $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ de $\mathbf{K}[X]$ tel que : $M = P(D) = \sum_{i=0}^{p} a_i D^i$.

Exercice 2.5 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On souhaite trouver toutes les matrices X telles que $X^2 = A$.
1. Montrer que : si $X^2 = A$, alors A et X commutent. En déduire que X est nécessairement triangulaire supérieure, ainsi que d'autres propriétés des coefficients.
2. Achever la résolution du problème.

Inversibilité de matrices carrées

Exercice 2.6 : Soit $(a,b) \in \mathbf{C}^2$, $a \neq b$.
Calculer, lorsqu'il existe, l'inverse de la matrice $M(a,b) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont tous les éléments diagonaux valent a et les autres b.

Exercice 2.7 : Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode de Jordan-Gauss, puis en résolvant un système linéaire.

Exercice 2.8 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que :

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V	F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	V

1. Voir le cours à ce sujet.
2. La multiplication de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ n'est pas réalisable si$n \neq p$.
3. Même si A est inversible, $A + (-A)$ ne l'est pas ; $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ n'est pas stable par addition.
4. Si A représente canoniquement l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$, alors
▶ ou bien u est injectif, et A est inversible ; $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A.B = I_n$;
▶ ou bien u n'est pas injectif, et si v est un endomorphisme tel que $\mathsf{Im}\, v = \mathsf{Ker}\, u$ et $\mathsf{Ker}\, v = \mathsf{Im}\, u$, alors $v \neq 0$, $u \circ v = v \circ u = 0_E$; $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A.B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.
5. Les vecteurs représentés par les colonnes de A engendrent $\mathsf{Im}\, f$, mais ne sont pas forcément libres.
7. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
8. ${}^{\mathrm{t}}(A.B) = {}^{\mathrm{t}}B.\, {}^{\mathrm{t}}A$.
9. Une matrice simultanément symétrique et antisymétrique est la matrice nulle : la somme de ces deux sous-espaces vectoriels est directe.
De plus : $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $A = \frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A) + \frac{1}{2}(A - {}^{\mathrm{t}}A)$, $\frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A)$ étant symétrique, $\frac{1}{2}(A - {}^{\mathrm{t}}A)$ antisymétrique. $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.
10. $A^3 - 3\,A^2 + 2\,I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \Leftrightarrow A.\frac{1}{2}\big(3\,A - A^2\big) = I_n$, d'où : $A^{-1} = \frac{1}{2}\big(3\,A - A^2\big)$.
11. On ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant par des matrices inversibles.
12. Ce système est de rang 2 ; l'application linéaire u de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^2$ canoniquement associée à sa matrice est surjective, donc ce système est compatible. L'ensemble des solutions est non vide, donc c'est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^4$ de dimension $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, u = 2$ (d'après le théorème du rang).
13. $(A.B)^{(n+1)} = A.(A.B)^n.B$ qui diffère en général de $(A.B)^{n+1}$.
14. Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; alors $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.
15. La condition est suffisante si la matrice n'est pas nulle : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ est de rang 0.

❑ Erreurs classiques

- En général $A.B \neq B.A$, même lorsque les deux produits matriciels sont définis.
- ${}^{t}(A.B) \neq {}^{t}A.{}^{t}B$, mais ${}^{t}(A.B) = {}^{t}B.{}^{t}A$.
- De même, si A et B sont inversibles, $(A.B)^{-1} \neq A^{-1}.B^{-1}$, mais $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
- $A.B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \not\Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ ou $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.
- Plus généralement, la résolution d'équations polynomiales est délicate : ainsi $X^2 + X = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ n'a pas pour seules solutions $X = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ et $X = -I_n$.
- $A.X = A.B \not\Rightarrow X = B$. Une condition suffisante pour pouvoir simplifier par une matrice est qu'elle soit inversible.
- Dans la méthode de Jordan-Gauss d'inversion d'une matrice, les opérations élémentaires portent soit toujours sur les lignes, soit toujours sur les colonnes, mais pas alternativement sur les lignes et les colonnes.

Corrigé

bon de commande

à présenter à votre libraire ou à retourner à

ELLIPSES — Édition Marketing

32 rue Bargue — 75740 Paris cedex 15

téléphone : 01 45 67 74 19 — télécopie : 01 47 34 67 94

www.editions-ellipses.fr

Nom ____________________ Prénom ____________________

Adresse ____

____

Code postal ____________________ Ville ____________________

Pays ____________________

Désire recevoir ____ exemplaire(s)

MATHÉMATIQUES PSI/PSI*

41 €

ISBN 978-2-7298-5164-4

Tarifs en vigueur au 01-07-2009

Ci-joint la somme de ____ €

par ❍ chèque bancaire ❍ C.C.P. ❍ mandat postal

Date

Signature