Chapitre 1
Espaces vectoriels et applications linéaires

Hermann **Grassmann**, mathématicien allemand, publie en 1844 un ouvrage qui contient tous les germes de l'algèbre linéaire : combinaisons linéaires, indépendance linéaire, bases, ainsi que des notions plus complexes qui serviront soixante ans plus tard en géométrie différentielle. Très confus, son ouvrage ne sera pas compris de ses contemporains. Il faudra attendre 1888 pour que le mathématicien italien Giuseppe **Peano** en saisisse toute l'importance et introduise l'axiomatique des espaces vectoriels, proche de celle que nous utilisons de nos jours. Quant à Grassmann, il préféra se tourner vers la linguistique et mit son intelligence au service de la traduction en allemand des textes sacrés védiques.

Hermann Grassmann
1809-1877

Objectifs

Les incontournables

- ▷ Revoir les notions élémentaires concernant les espaces vectoriels : famille libre, famille génératrice, base, dimension finie, …
- ▷ Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels, ainsi que de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et donc de projecteur.
- ▷ Être capable de déterminer le rang d'un système linéaire, et de manipuler les théorèmes concernant le rang.
- ▷ Savoir déterminer le rang, l'image et le noyau d'une application linéaire (par une base ou un système d'équations).
- ▷ Savoir démontrer que deux espaces sont égaux ou sont isomorphes.

Et plus si affinités…

- ▷ Savoir appliquer les théorèmes du cours sur les espaces de polynômes, en dimension finie ou infinie.
- ▷ Bien comprendre la notion de polynôme d'interpolation de Lagrange.
- ▷ Faire le lien entre hyperplan et noyau d'une forme linéaire non nulle.
- ▷ Comprendre et utiliser les notions d'espace dual et de base duale et anté-duale.

Résumé de cours

$\mathbf{K}$ désigne indifféremment l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Familles libres, familles génératrices, bases

Définition : Famille libre, famille liée —. ▸ *$(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, famille **finie** de vecteurs de E, est **libre** si, et seulement si, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbf{K}^n$,*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0.}$$

▸ *$(x_i)_{i\in I}$, famille de vecteurs de E de cardinal quelconque, est **libre** si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.*
▸ *Les x_i, $i \in I$, sont **linéairement indépendants** si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.*
▸ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

Propriétés
▸ Si une famille est libre, toute famille obtenue en permutant ses éléments est libre : le fait qu'une famille soit libre ne dépend pas de l'ordre de ses éléments.
▸ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▸ Toute famille contenant une famille liée est liée. (C'est la contraposition de l'implication précédente.) En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
▸ Une famille de deux vecteurs est liée si, et seulement si, ces deux vecteurs sont colinéaires.
▸ Une famille contenant plusieurs fois le même élément est liée.

Proposition 1.1.— Famille liée et combinaison linéaire —. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des x_i est combinaison linéaire des autres.

Définition : Famille génératrice —. *Une partie X de E est une **famille génératrice de l'espace vectoriel** E si, et seulement si, le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est E lui-même. (Autrement dit, $\operatorname{Vect} X = E$.)*

Proposition 1.2.— Soit G une famille génératrice de E. Si tout élément de G est combinaison linéaire des éléments d'une famille X d'éléments de E, alors X est génératrice de E.

Définition : Base —. *Une famille de vecteurs du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est une **base** de E si, et seulement si, elle est une famille libre et génératrice.*

Exemples : ▸ $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$. $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
▸ $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
Ce sont les bases les plus simples de chacun de ces espaces vectoriels : on dit que ce sont leurs **bases canoniques** respectives.

Dimension

Définition : Espace vectoriel de dimension finie —. *Un espace vectoriel est **de dimension finie** si, et seulement si, il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 1.3.— Théorème d'existence d'une base et de la base incomplète —. Tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet une base finie.
On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Lemme 1.4.— Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

Théorème 1.5.— Théorème de la dimension —. Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de*** E et noté $\dim E$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

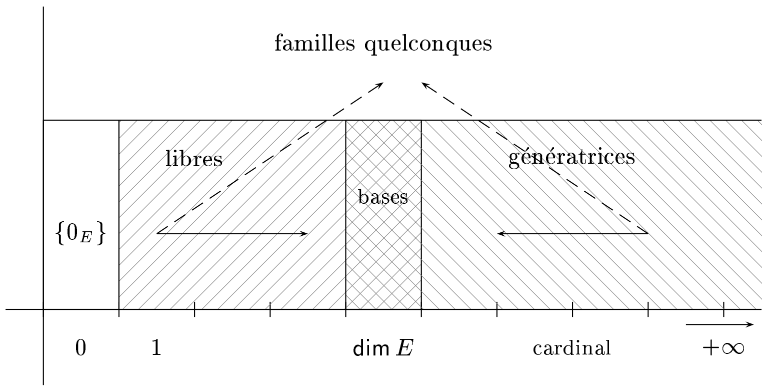

Illustration du théorème de la dimension, et de la proposition suivante

Proposition 1.6.— En ajoutant un élément x à une famille libre L, on obtient une famille libre si $x \notin \mathrm{Vect}\,(L)$, et une famille liée si $x \in \mathrm{Vect}\,(L)$.
En enlevant un élément x à une famille génératrice G, on obtient une famille non génératrice si $x \notin \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{x\})$ et une famille génératrice si $x \in \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{x\})$.

Proposition 1.7.— Si $\dim E = n$ et si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre :
(1) $\mathcal{B}$ est une base de E (2) $\mathcal{B}$ est une famille libre (3) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Proposition 1.8.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition : Base adaptée à un sous-espace vectoriel —. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p du $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, une base de E est **adaptée à** F lorsque ses p premiers vecteurs forment une base de F.*

Proposition 1.9.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe un n-uplet unique $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$ tel que :

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i.}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est le ***n-uplet des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.***

Exemple : Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

Définition : Rang d'une famille de vecteurs —. *Le **rang d'une famille finie de vecteurs** est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.*

Notation : *Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est noté* $\mathsf{Rg}\,(\mathcal{F})$.

■ Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition : Somme —. *Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, **la somme de ces sous-espaces vectoriels** est le sous-espace vectoriel, noté $\sum_{i=1}^{n} E_i$, engendré par la réunion des E_i :*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathsf{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).}$$

L'appellation « somme de sous-espaces vectoriels » est justifiée par la caractérisation suivante :

Proposition 1.10.— $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des sommes de vecteurs des E_i, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \text{ où, } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\, x_i \in E_i\right\}.}$$

Définition : Somme directe —. ***La somme des sous-espaces vectoriels de la famille** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ **est directe** si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\, x_i = 0_E\right).}$$

Dans ce cas, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.11.— Caractérisation d'une somme directe —. La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si, tout vecteur x de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose **de manière unique** sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ où } (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n.$$

Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires —. *Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sont **supplémentaires dans** E si, et seulement si, leur somme est directe et égale à E, autrement dit, lorsque :* $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.12.— Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sont supplémentaires si, et seulement si :

$$\boxed{\forall\, x \in E,\ \exists!(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.}$$

Proposition 1.13.— Dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$, un polynôme P de degré $n+1$ étant donné, le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}[X]\,P$, constitué des multiples de P, et le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n sont supplémentaires : $\mathbf{K}[X] = \mathbf{K}_n[X] \oplus \mathbf{K}[X]\,P$.

Proposition 1.14.— Existence d'un supplémentaire —. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, tout vecteur x de E s'écrit, **de manière unique** :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ où } (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} E_i.$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons p_i l'application de E dans E définie par : $p_i(x) = x_i$.

Définition : *La famille des $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est **la famille des projecteurs de** E **associée à la décomposition** $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.*

Proposition 1.15.— Propriétés de la famille des projecteurs associés à une décomposition en supplémentaires —.

- $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, p_i est un endomorphisme de E ;
- $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \circ p_i = p_i$ (p_i est un projecteur) ;
- $\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\big(i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}\big)$;
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 1.16.— Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ alors, pour toute famille u_i d'applications linéaires de E_i dans un espace vectoriel F, il existe une application linéaire unique u de E dans F telle que, pour tout i, u_i soit la restriction de u à E_i.

Théorème-Définition 1.17.— Base adaptée à une décomposition en supplémentaires —. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si la somme des $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe, alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Si les E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont supplémentaires dans E, alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ est une base de E dite **base adaptée à la décomposition** $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Remarque : Une application de cette notion est la construction et le produit de matrices par blocs (voir à ce sujet le chapitre consacré à la réduction).

Corollaire 1.18.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —. Les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ étant des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, leur somme est directe si, et seulement si,

$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i}.$$

Corollaire 1.19.— Supplémentaires en dimension finie —. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$;

(ii) les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$;

(iii) $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

Corollaire 1.20.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).}$$

■ Applications linéaires

Proposition 1.21.— Détermination d'une application linéaire en dimension finie —. Étant donné deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F, une base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ de E et une famille $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ de vecteurs de F, il existe une application linéaire u, et une seule, de E dans F, telle que :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ u(e_i) = f_i.$$

Corollaire 1.22.— Si E est de dimension finie, une application linéaire u de E dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F est entièrement déterminée par les images qu'elle attribue aux vecteurs d'une base de E.

Commentaire : Ceci constitue le fondement de la définition de la matrice de u dans une base donnée.

Définition : Espaces vectoriels isomorphes —. *Deux espaces vectoriels sont **isomorphes** si, et seulement si, il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.*

Proposition 1.23.— L'image d'une base (respectivement d'une famille libre) par un isomorphisme est une base (respectivement une famille libre).

Proposition 1.24.— Conservation du rang par un isomorphisme —. L'image par un isomorphisme d'une famille de vecteurs est une famille de vecteurs de même rang.

Remarque : Une base de E étant choisie, l'application associant à un vecteur le n-uplet de $\mathbf{K}^n$ de ses coordonnées dans cette base est un isomorphisme ; en conséquence, le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille des n-uplets de ses coordonnées dans $\mathbf{K}^n$.

Proposition 1.25.— Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales.

Conséquence : Tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

Théorème-Définition 1.26.— Noyau d'une application linéaire —. u étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{x \in E,\ u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé ***noyau de*** u et noté $\mathsf{Ker}\, u$.

Théorème-Définition 1.27.— Image d'une application linéaire —. u étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{u(x),\ x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé ***image de*** u et noté $\mathsf{Im}\, u$.

Définition : Rang d'une application linéaire —. *Le **rang d'une application linéaire** est la dimension de son image.*

Proposition 1.28.— E étant un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base et u étant une application linéaire de E dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F :

$$\boxed{\mathsf{Im}\, u = \mathsf{Vect}\ (u(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]} \text{ et } \mathsf{Rg}\, u = \mathsf{Rg}\ (u(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}.}$$