

Table des matières

Méthodes mathématiques, 1

1	Théorème spectral pour les opérateurs normaux bornés	3
1.1	Ce qu'il faut savoir sur les mesures complexes	3
1.1.1	Définitions, exemples	3
1.1.2	Le théorème de Radon-Nikodym	4
1.1.3	Quelques conséquences de Radon-Nikodym	7
1.2	Le théorème spectral	13
1.2.1	Exemple motivant	13
1.2.2	Deux versions du théorème spectral	14
1.3	Conséquences du théorème spectral fort	24
1.3.1	Premières conséquences	24
1.3.2	Spectre d'un opérateur normal, caractérisation des opérateurs normaux compacts	30
1.3.3	Propriétés des opérateurs positifs	33
1.3.4	Exemples d'opérateurs compacts : les opérateurs à trace et les opérateurs de Hilbert-Schmidt	37
2	Théorème spectral pour des opérateurs non bornés	49
2.1	Opérateurs non bornés et adjoints d'opérateurs	49
2.2	Nombreux exemples liées à la mécanique quantique	59
2.2.1	L'opérateur position	59
2.2.2	L'opérateur énergie potentielle	60
2.2.3	L'opérateur impulsion	61
2.2.4	L'opérateur de quantification	65
2.2.5	Dérivations, transformées de Fourier et distributions : le lien	68
2.2.6	L'opérateur de Schrödinger	73
2.3	Où l'on reconsidère le théorème RSFB	77

2.4	Théorème spectral pour un opérateur normal non nécessairement borné	83
2.4.1	Le théorème spectral	83
2.4.2	Conséquences directes	88
2.5	Représentation des semi-groupes continus d'opérateurs normaux	90
2.6	Démonstration du théorème 2.5.2	93
<hr/>		
Fondements de la mécanique quantique,		97
<hr/>		
3	Principes de la mécanique quantique	99
3.1	Principes statiques et premières conséquences	99
3.2	Quantification de la position et de l'impulsion	104
3.2.1	Quantification de la position	104
3.2.2	Quantification de l'impulsion	106
3.3	Principe dynamique. L'équation de Schrödinger	107
3.3.1	Quantification de Weyl polynomiale	109
3.3.2	L'équation de Schrödinger	112
3.3.3	Principe de résolution et exemples	114
4	Relations d'incertitude, quantification, symétries	117
4.1	Relations d'incertitude	117
4.1.1	Définition de l'incertitude	117
4.1.2	Relations d'incertitude	119
4.2	Quantification dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$	121
4.3	Symétries	128
4.3.1	Le théorème de Wigner	128
4.3.2	Invariance des lois de la mécanique quantique par les transformées de Galilée	129
4.3.3	Invariance des lois de la mécanique quantique par les translations temporelles	131
Appendice		133
A	Topologies faibles et théorème d'Alaoglu-Banach	133
A.1	Un résultat de topologie générale	133
A.2	\mathcal{F} -topologie et topologie faible sur un espace vectoriel topologique	133
A.3	Théorème d'Alaoglu-Banach et conséquence	136

B	Le théorème de Gelfand-Naïmark	137
B.1	Algèbre de Banach, définitions fondamentales	137
B.2	Le théorème de Gelfand-Naïmark	141
C	Dérivée et primitive au sens des distributions	145
D	Transformée de Fourier	149
D.1	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	150
D.2	Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide	151
D.3	La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$	159
E	L'intégrale de Bochner	165
E.1	Construction standard de l'intégrale de Bochner	165
E.2	Variante de la construction de l'intégrale de Bochner	169
	Notations	173
	Bibliographie	175
	Index	177