CHAPITRE 1

Théorème spectral pour les opérateurs normaux bornés

1.1. Ce qu'il faut savoir sur les mesures complexes

1.1.1. Définitions, exemples

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble. Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X est une* tribu *sur X ou encore une σ*-algèbre *sur X si* (i) *$\mathcal{T}$ contient X,* (ii) *$\mathcal{T}$ contient le complémentaire de chacun de ses éléments,* (iii) *$\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable : lorsque $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{T}$.*

Définition 1.1.2. *Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur un ensemble X, une* mesure complexe *μ sur $(X,\mathcal{T})$ est une fonction complexe sur $\mathcal{T}$ telle que pour tout $E \in \mathcal{T}$ et toute partition dénombrable $\{E_i\}_{i\in I}$ de E par des parties de $\mathcal{T}$, on a : $\mu(E) = \sum_I \mu(E_i)$, la convergence de cette série faisant partie de la définition.*

Si X est un espace topologique et $\mathcal{T}$ la tribu des boréliens de cet espace, on parlera de mesure de Borel *sur X.*

On sait alors que si l'on pose $|\mu|(E) = \sup \sum_I |\mu(E_i)|$, le sup étant pris sur toutes les partitions dénombrables de E, cette quantité est bornée. En effet, la série $\sum_I \mu(E_i)$ est commutativement convergente, donc absolument convergente (voir par exemple L. Schwartz, *Topologie générale et Analyse fonctionnelle*). De plus $|\mu|$ est une mesure positive bornée sur $(X,\mathcal{T})$ appelée la *variation totale* de μ (voir Rudin, *Analyse réelle et complexe*, théorème 6.4). On pose $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Ceci définit une norme sur l'espace vectoriel complexe des mesures complexes sur $(X,\mathcal{T})$.

Rappelons qu'une mesure borélienne positive sur un espace topologique X est dite *régulière* si pour tout borélien E, on a

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V)\,;\, E \subset V,\ \ V \text{ ouvert}\} = \sup\{\mu(K)\,;\, K \subset E,\ K \text{ compact}\}.$$

On montre que si X est localement compact et si tout ouvert de X est σ-compact (c'est-à-dire réunion dénombrable de compacts), alors une mesure positive de Borel sur X est régulière si $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K. Lorsque sur un espace topologique μ est une mesure borélienne complexe, on dit qu'elle est régulière si $|\mu|$ est régulière. Ainsi, *lorsque X est localement compact et lorsque tout ouvert de X est σ-compact, toute mesure de Borel complexe est régulière.*

Exemples.

1. La mesure de Lebesgue sur le tore est une mesure complexe positive.
2. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ n'est pas une mesure complexe.
3. La mesure de dénombrement sur $[0,1]$ n'est pas une mesure complexe.
4. Si μ est une mesure positive sur $(X,\mathscr{T})$ et si $g \in L^1(\mathbb{T})$, alors la mesure λ définie pour tout $E \in \mathscr{T}$ par $\lambda(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ est une mesure complexe. ♣

1.1.2. Le théorème de Radon-Nikodym

Nous évoquons maintenant trois théorèmes. Le premier, théorème-clef de la théorie de la mesure, est le théorème de Radon-Nikodym. Il permet en particulier de définir l'intégrale au sens d'une mesure complexe. Auparavant rappelons que si μ est une mesure positive et λ une mesure complexe définie sur la même tribu $\mathscr{T}$ que μ, on dit que λ est *absolument continue par rapport à μ* (et l'on note $\lambda \ll \mu$) si pour toute partie mesurable $\omega \in \mathscr{T}$, on a $\lambda(\omega) = 0$ si $\mu(\omega) = 0$. On dit qu'une mesure complexe λ est *portée par A* si pour toute partie mesurable ω, on a : $\mu(\omega) = \mu(A \cap \omega)$. Deux mesures complexes sont *étrangères* si elles sont portées par deux ensembles disjoints.

Théorème 1.1.1. *Soient λ et μ deux mesures positives et bornées sur un espace mesurable $(X,\mathscr{T})$. Il existe un unique couple de mesures complexes (λ_a, λ_s) tel que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \qquad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_a \ll \mu, \\ \lambda_s \perp \mu. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

De plus il existe une fonction positive $h \in L^1(\mathbb{T})$ telle que pour tout $E \in \mathscr{T}$, $\lambda_a(E) = \int_E h\,\mathrm{d}\mu$.

L'égalité (1.1) est la *décomposition de Lebesgue* de λ par rapport à μ. La fonction h est la *dérivée de Radon* de λ_a par rapport à μ. Elle est notée

$$h = \frac{\mathrm{d}\lambda_a}{\mathrm{d}\mu} \tag{1.2}$$

On peut étendre sans difficulté le théorème 1.1.1 de la façon suivante.

Théorème 1.1.2. *Soit μ une mesure positive σ-finie*[1] *et λ une mesure complexe sur $(X, \mathscr{T})$. Il existe un unique couple de mesures complexes (λ_a, λ_s) tel que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \qquad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_a \ll \mu, \\ \lambda_s \perp \mu. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

De plus il existe une fonction positive $h \in L^1_\mu(X)$ telle que pour tout $E \in \mathscr{T}$,

$$\lambda_a(E) = \int_E h \,\mathrm{d}\mu.$$

DÉMONSTRATION

L'espace X se décompose en une partition (dénombrable) de sous-ensembles μ-mesurables $\{X_n\}_n$ avec pour tout n, $\mu(X_n) < \infty$. On écrit ensuite $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et l'on applique le théorème 1.1.1 sur X_n respectivement aux quatre couples de mesures $(\lambda_1^+, \mu), (\lambda_1^-, \mu)$ et $(\lambda_2^+, \mu), (\lambda_2^-, \mu)$ où $\lambda_i^+ = \frac{1}{2}(|\lambda_i| + \lambda_i)$ et $\lambda_i^- = \frac{1}{2}(|\lambda_i| - \lambda_i)$ sont des mesures positives bornées. On reconstitue ainsi λ_a, λ_s et h. ≡

Il est important de noter la *décomposition polaire* d'une mesure complexe.

Théorème 1.1.3. *Si μ est une mesure complexe sur $(X, \mathscr{T})$, il existe une fonction mesurable h de module 1 (c'est-à-dire $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$) telle que*

$$\mu = h\,|\mu| \tag{1.4}$$

DÉMONSTRATION

C'est une conséquence de Radon-Nikodym puisque $\mu \ll |\mu|$. Il faut encore montrer que $|h| = 1$. Si $r > 0$ et $A_r = \{x\,; |h(x)| < r\}$, on a $|\mu|(A_r) \leqslant r|\mu|(A_r)$ en utilisant l'égalité (1.4) et la définition de $|\mu|$. Par conséquent, $|\mu|(A_r) = 0$ si $r < 1$. Ainsi $|h| \geqslant 1$ $|\mu|$-p. p. Par ailleurs pour tout ensemble $|\mu|$-mesurable, on a

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h \,\mathrm{d}|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leqslant 1$$

1. Cela signifie que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $X_n \in \mathscr{T}$ et $\mu(X_n) < +\infty$.

et par conséquent on a $|h| \leqslant 1$ μ-p. p. On prolonge ensuite h par 1 sur l'ensemble de mesure nulle $\{x\,;|h(x)| \neq 1\}$.

Ceci permet de montrer le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.4. *Si μ est une mesure positive et $g \in L^1(\mathbb{T}))$ pour la mesure μ, alors $\lambda = g\,\mu$ implique $|\lambda| = |g|\,\mu$. On a donc $\|\lambda\| = \|g\|_1$.*

DÉMONSTRATION

En effet la décomposition polaire donne $\lambda = h|\lambda|$, $|h| = 1$, d'où $|\lambda| = \overline{h}g\,\mu$. Les mesures $|\lambda|$ et μ étant positives, on a $\overline{h}g > 0$ d'où $\overline{h}g = |g|$.

Le théorème 1.1.3 permet également de définir l'intégrale d'une fonction borélienne complexe h par rapport à une mesure complexe μ : si $\mu = h|\mu|$ est la décomposition polaire de μ on pose

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \int f h\,\mathrm{d}|\mu| \tag{1.5}$$

Le deuxième théorème évoqué est une conséquence du théorème de Radon-Nikodym. C'est le théorème de *représentation* (dû à Riesz) des formes linéaires bornées sur $C_0(X)$, espace vectoriel complexe des fonctions continues sur X qui s'annulent à l'infini[1], par des mesures de Borel sur X, où X est un espace topologique séparé localement compact. Il sera utilisé pour démontrer l'unicité de la décomposition spectrale d'un opérateur normal sur un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.5 (théorème de représentation de Riesz).
Avec les notations précédentes, à toute forme linéaire bornée Φ sur $C_0(X)$, correspond une unique mesure de Borel μ telle que

$$\forall f \in C_0(X),\;\; \phi(f) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

De plus $\|\Phi\| = |\mu|(X) = \|\mu\|$.

Remarque. Le théorème de Riesz entraîne que l'espace vectoriel des mesures complexes sur X muni de la norme $\|\cdot\|$ est complet puisque isométrique au dual topologique de $C_0(X)$. En particulier si une série de mesures complexes sur X est normalement convergente, elle converge vers une mesure complexe.

1. Une fonction complexe f s'annule à l'infini sur X si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $|f| < \varepsilon$ sur $X \setminus K$.

Enfin le troisième théorème qui est encore un corollaire de Radon-Nikodym est le théorème de représentation du dual de L^p lorsque p est un réel de $[1, +\infty]$. Il sera utilisé dans la section sur les opérateurs non bornés pour montrer dans un exemple qu'un certain opérateur symétrique est auto-adjoint (voir § 2.1).

Théorème 1.1.6. *Soient p un réel de $[1, +\infty[$ et q le réel conjugué de p (c.-à-d. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Si μ est une mesure positive σ-finie sur un ensemble X et Φ une forme linéaire continue sur $L^p(\mu)$, il existe une* unique *fonction $g \in L^q(\mu)$ tel que pour tout $f \in L^p(\mu)$, on a $\Phi(f) = \int_X f g \,\mathrm{d}\mu$. De plus $\|\Phi\| = \|g\|_q$.*

1.1.3. Quelques conséquences de Radon-Nikodym

Pour les théorèmes non démontrés de cette section, on pourra se référer à RUDIN, *Analyse réelle et complexe.*

Dérivée d'une mesure complexe et dérivée de Radon-Nikodym

On définit sur $\mathbb{R}^k$ la notion de famille substantielle d'ouverts. On note m la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^k$. Les boules de $\mathbb{R}^k$ désignent dans ce qui suit les boules pour la norme euclidienne.

Définition 1.1.3. *Une* famille substantielle d'ouverts de $\mathbb{R}^k$ *est une famille Ω vérifiant les deux points suivants :*

1. *Il existe une constante $\beta \leqslant 1$ telle que tout $E \in \Omega$ soit contenu dans une boule B telle que $m(E) \leqslant m(B) \leqslant \beta m(E)$.*
2. *pour tout $x \in \mathbb{R}^k$ et tout réel $\delta > 0$, x est contenu dans un sous-ensemble E de Ω de diamètre inférieur à δ.*

L' idée de cette définition est que dans une famille substantielle d'ouverts, on ne peut avoir un très petit diamètre et un très grand volume ou inversement un très grand diamètre et un très petit volume car cela est le cas pour les boules de $\mathbb{R}^k$.

Par exemple les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, les cubes ouverts de $\mathbb{R}^k$ sont des familles substantielles d'ouverts. Cette définition donne accès à la dérivée d'une mesure complexe en s'inspirant du petit résultat suivant :

> *Si μ est une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $f(x) = \mu(]-\infty, x[)$ admet une dérivée $f'(x)$ au point x si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe*

> *$\delta > 0$ tel que, pour tout intervalle I contenant x de diamètre $< \delta$, on ait :*
>
> $$\left|\frac{\mu(I)}{m(I)}\right| - f'(x) < \varepsilon.$$

Nous noterons $\delta(E)$ le diamètre d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^k$.

Définition 1.1.4. *Soient μ une mesure de Borel complexe de $\mathbb{R}^k$, Ω une famille substantielle d'ouverts. La mesure μ est Ω-dérivable en x s'il existe $A \in \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\left|\frac{\mu(E)}{m(E)} - A\right| < \varepsilon$, chaque fois que $x \in E$ et $\delta(E) < \eta$. On note alors $A = D_\Omega \mu(x)$.*

Par la suite, quand la famille substantielle utilisée sera explicite, on écrira simplement $A = D\mu(x)$.

Remarque. Lorsque μ est *une mesure de Borel complexe, réelle,* on a accès au calcul des dérivées par les dérivées supérieures et les dérivées inférieures comme dans la théorie des fonctions. Si l'on pose

$$\overline{\Delta}_r(x) = \sup\left\{ \frac{\mu(E)}{m(E)} \,;\, x \in E, \delta(E) < r \right\},$$

alors $\overline{\Delta}_r(x)$ est une fonction croissante de r et

$$\overline{D}\mu(x) = \lim_{r\to 0} \overline{\Delta}_r(x) = \inf_r \sup\left\{ \frac{\mu(E)}{m(E)} \,;\, x \in E, \delta E < r \right\} \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\lim_{\delta(E)\to 0}} \frac{\mu(E)}{m(E)}.$$

On a de même

$$\underline{\Delta}_r(x) = \inf\left\{ \frac{\mu(E)}{m(E)} \,;\, x \in E, \quad \delta(E) < r \right\}$$

et $\underline{\Delta}_r(x)$ est une fonction décroissante de r et $\underline{D}\mu(x) = \lim_{r\to 0} \underline{\Delta}_r(x)$. Il est élémentaire de voir que $\underline{D}(x) \leqslant \overline{D}(x)$ et que μ est dérivable si et seulement si $\underline{D}(x) = \overline{D}(x)$. Dans ce cas $D\mu(x) = \underline{D}(x) = \overline{D}(x)$. Nous allons maintenant donner le résultat essentiel sur la dérivation pour cet exposé.

Théorème 1.1.7. *Si Ω est une famille substantielle d'ouverts de $\mathbb{R}^k$ et μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^k$,*

1. *μ est différentiable m-p. p.*
2. *$D\mu \in L^1(\mathbb{R}^k)$.*

3. *Pour tout borélien E, $\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E (D\mu)(x)\,\mathrm{d}x$, avec $\mu_s \perp m$ et $D\mu_s(x) = 0$ m-p. p.*

Remarque. Le théorème 1.1.7 est une reformulation du théorème de Radon-Nikodym pour la décomposition d'une mesure borélienne de $\mathbb{R}^k$ relativement à la mesure de Lebesgue. Il montre que la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure $\sigma(E) = \int_E D\mu(x)\,\mathrm{d}x$ par rapport à la mesure de Lebesgue, au point x, est égale presque partout à $D\mu(x)$. En particulier si $\mu \ll m$, on a $D\mu(x) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x)$ presque partout. De plus $\mu \perp m$ si et seulement si $D\mu(x) = 0$ m-p. p.

On peut appliquer ce qui précède à la situation suivante. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$, la mesure μ sur les boréliens E définie par $\mu(E) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ est une mesure complexe absolument continue par rapport à m. Ainsi, on a presque partout $D\mu(x) = f(x)$ ou encore en revenant à la définition de la dérivée :

$$\lim_{E \to x_0} \frac{1}{m(E)} \int_E f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0).$$

Fonctions à variation bornée et fonctions absolument continues

Soit f une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$. À chaque réel x, on associe le réel $T_f(x) = \sup_{\Delta(x)} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ où $\Delta(x)$ est l'ensemble des subdivisions $-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x < \infty$. On constate que la fonction T_f, à valeur dans $[-\infty, +\infty]$ est croissante et l'on pose $V(f) = \lim_{+\infty} T_f$. On montre facilement (voir Rudin, *Analyse réelle et complexe*) que pour deux réels x, y, vérifiant $x \leqslant y$ on a

$$|f(y) - f(x)| \leqslant T_f(y) - T_f(x). \tag{1.6}$$

Définition 1.1.5. *$V(f)$ est la* variation totale *de f. Si elle est finie, on dit que f est à variation bornée (v. b.). Si l'on prend les subdivisions sur un intervalle, on définit de façon analogue une fonction à variation bornée sur un intervalle.*

Par ailleurs si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, chaque fois qu'une famille finie d'intervalles disjoints $\{I_i =]\alpha_i, \beta_i[\}_i$ vérifie $\sum_i m(I_i) < \delta$, alors $\sum_i |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| < \varepsilon$, on dit que f est absolument continue (a. c.)

C'est un exercice facile de montrer que le produit de deux fonctions à variation bornée sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est à variation bornée sur cet intervalle.

Si l'on restreint une fonction absolument continue à un intervalle borné, cette restriction est à variation bornée. Le reste de ce paragraphe va développer de manière plus substantielle le lien entre fonctions a. c. et fonctions à v. b. Une fonction à v. b. est dite *normalisée (v. b. n)* si elle est continue à gauche en tout point et si sa limite en $-\infty$ est égale à 0. On montre que si f est v. b. n., alors T_f est v. b. n. Toute fonction v. b. continue à gauche sur un intervalle borné peut être considérée comme v. b. n. sur $\mathbb{R}$ quitte à la prolonger par 0 à gauche de l'intervalle. Ainsi toute fonction a. c. sur un intervalle borné peut être considérée comme une fonction v. b. n. sur $\mathbb{R}$. Voici une caractérisation des fonctions v. b. n. par les mesures de Borel complexes.

Théorème 1.1.8. *La fonction complexe f définie sur $\mathbb{R}$ est v. b. n. si et seulement s'il existe une mesure de Borel complexe μ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$f(x) = \mu(]-\infty, x[). \tag{1.7}$$

Alors $|\mu|(]-\infty, x[) = T_f(x)$ et la fonction f est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.

PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION

Si l'on a une subdivision $-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x < \infty$ et si f est définie par l'égalité (1.7), alors on a immédiatement l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant |\mu|(]-\infty, x[),$$

ce qui montre que $T_f(x) \leqslant |\mu|(]-\infty, x[)$. Ainsi $V(f) \leqslant |\mu|(\mathbb{R}) = \|\mu\|$. La continuité à gauche et la limite nulle en $-\infty$ viennent des propriétés de la mesure d'une réunion croissante et d'une intersection décroissante d'ensembles mesurables.

On se donne maintenant une fonction f à variation bornée normalisée croissante au sens large et l'on pose

$$\begin{cases} \Phi(x) = \{f(x)\} & \text{si } f \text{ est continue en } x\,, \\ \Phi(x) = [f(x), f(x^+)] & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \Phi(E) = \bigcup_{x \in E} \Phi(x).$$

En prenant f en escalier on remarque directement l'égalité $f(x) = m(\Phi(]-\infty, x[)$. On considère l'ensemble $\Sigma = \{E \subset \mathbb{R}\,; \Phi(E) \text{ est un borélien}\}$. On montre que Σ est une σ-algèbre qui contient les boréliens de $\mathbb{R}$.

Si l'on pose pour $E \in \Sigma$: $\mu(E) = m(\Phi(E))$, alors μ est une mesure complexe sur Σ et pour une fonction f croissante, on a $f(x) = \mu(]-\infty, x[)$. On généralise alors pour une fonction v. b. n. quelconque, en écrivant $f = u + iv$. Alors les fonctions u_1 et u_2 définies par : $u_1 = \frac{1}{2}(T_u + u)$, $u_2 = \frac{1}{2}(T_u - u)$, sont croissantes au sens