Chapitre 1

Suites

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (on mesure un phénomène à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse. Une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique.
Les premières suites numériques sont étudiées chez les Grecs avec les suites de nombres premiers.
Dans les années 1200, en Italie, Léonard de Pisano (plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci), crée la suite numérique récurrente très simple qui porte son nom, définie par

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}, \quad \text{avec } U_0 = 1 \text{ et } U_1 = 1.$$

Cette suite traduit l'évolution d'une population de Lapins.
La première apparition du nombre exponentiel, noté e, comme nombre remarquable date de 1683, époque à laquelle Bernouilli s'intéresse aux calculs d'intérêts pour des placements financiers. Ce qui l'amène à étudier la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jusqu'au XIX^e siècle, de grands mathématiciens, comme Newton, Leibniz, Euler ou Gauss, inventent des méthodes originales de calcul numérique, utilisant les suites numériques.

Exemple 1 ***Description de la méthode de Newton.***
En analyse numérique, la méthode de Newton, ou méthode de Newton-Raphson, est un algorithme efficace pour trouver des approximations des solutions de l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction à valeurs réelles.
La méthode de Newton a été découverte par Isaac Newton et publiée en 1736, bien que la méthode soit décrite par Joseph Raphson en 1690.

Description graphique de la méthode de Newton :
On choisit une valeur d'abscisse raisonnablement proche du zéro. On remplace alors la courbe par sa tangente et on calcule le zéro de l'approximation affine associée à la tangente. Ce zéro de la tangente sera généralement plus proche du zéro de la fonction, et la méthode peut être réitérée.
En pratique, on considère la fonction f définie de l'intervalle $[a; b]$ vers $\mathbb{R}$. f est aussi dérivable sur $[a; b]$.
On choisit une valeur arbitraire x_0.

- *La tangente en x_0 a pour équation*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \textit{où } f' \textit{ est la dérivée de } f.$$

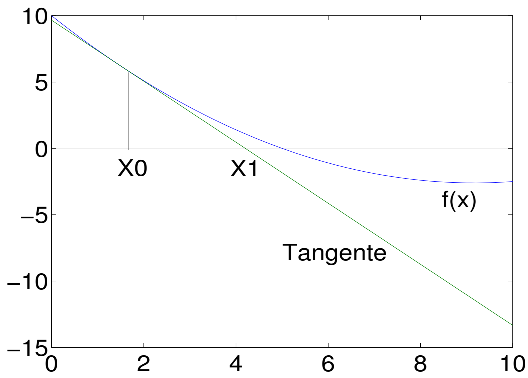

FIG. 1.1 – Méthode de Newton

- *On cherche x_1 tel que $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$, d'où*

$$\Rightarrow \quad f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad x - x_0 = -\tfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ainsi, on en déduit que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On obtient alors, par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Remarque 1
Cette méthode est très efficace dès que x_0 est choisi proche de la racine cherchée. Elle a cependant certaines limites.

- *Le premier inconvénient de la méthode est le besoin de la dérivée de la fonction à calculer. Si on a une expression analytique de cette fonction, cela ne pose pas de problème. Cependant, il arrive souvent que ce ne soit pas le cas. Il faut alors évaluer numériquement la dérivée de cette fonction, ce qui est très délicat.*
- *L'autre limite de la méthode apparaît clairement dans sa formulation : Si on se trouve en un point de dérivée nulle, la méthode flanche. La suite, alors, diverge.*

La méthode de Newton fait partie des méthodes itératives. Celles-ci ont pour outils les suites. Elles tentent de déterminer une approximation des solutions d'équations différentielles et d'autres problèmes liés, provenant des sciences physiques et de l'ingénierie.
Ainsi, par exemple dans l'industrie automobile, la prédiction du bruit rayonné est une étape nécessaire pendant le cycle de conception. En effet, en plus des normes, les véhicules doivent satisfaire les attentes des futurs passagers. Afin de résoudre les équations qui proviennent de ce type de problèmes, les mathématiciens ont mis au point plusieurs méthodes itératives. Et donc, ils utilisent les suites.
De même, pour les prévisions météorologiques, les ingénieurs disposent de plusieurs sources d'information hétérogènes tant en nature qu'en qualité et densité : de l'information de type mathématique, physique, statistique, ainsi que des images. L'information de type mathématique, ce sont des équations qui gouvernent l'évolution des fluides : océan et

atmosphère. Il s'agit de systèmes d'équations complexes que l'on sait résoudre de façon approchée par méthodes itératives.
Les méthodes itératives démarrent à partir d'une valeur arbitraire ou estimée grossièrement. Ensuite elles permettent de trouver des approximations successives qui devraient converger vers la solution sous certaines conditions.
Par ailleurs, certains problèmes continus peuvent parfois être remplacés par un problème discret dont la solution est connue pour approcher celle du problème continu ; ce procédé est appelé discrétisation. Par exemple, la solution d'une équation différentielle est une fonction. Cette fonction peut être représentée de façon approchée par une quantité finie de données, en considérant un ensemble de points finis $\{x_0; x_1; \cdots x_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ de son domaine de définition.
L'utilisation des méthodes itératives et plus généralement des méthodes numériques a grandement été facilitée par les ordinateurs et la mise sous forme d'algorithme. L'expansion des ordinateurs depuis la seconde moitié du XX^e siècle a permis l'application des méthodes numériques dans de nombreux domaines scientifiques, techniques et économiques.

Avant de s'intéresser à l'étude des suites proprement dite, on définit et on détermine les propriétés de l'ensemble dans lequel nous devons travailler, en l'occurrence ici, $\mathbb{R}$. Ainsi, on connaîtra tous les outils nécessaires à l'étude des suites.

1.1 Le corps $\mathbb{R}$

1.1.1 Rappels

Définition 1
Un anneau est un triplé $(A; +; .)$ constitué :
- *d'un ensemble non vide A*
- *d'une addition telle que $(A; +)$ soit un groupe commutatif*
- *d'une multiplication*
  - *associative*
  - *distributive par rapport à l'addition*
  - *d'un élément neutre.*

L'anneau est dit commutatif lorsque sa multiplication est commutative.

Définition 2
Soit U l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(A; +; .)$ pour la multiplication. U est stable pour la multiplication.
$(U; .)$ est un groupe, appelé groupe des unités de l'anneau.

Définition 3
Un corps est un anneau commutatif $(\mathbb{K}; +; .)$ dont le groupe des unités est $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \backslash \{0_{\mathbb{K}}\}$, où $0_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{K}$.

1.1.2 Définition de $\mathbb{R}$

Définition 4 ***Relation d'ordre***
Il existe sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre $\leq$ c'est-à-dire, une relation qui vérifie :
- *$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$, appelée la réflexivilité.*
- *Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$, appelée l'anti-symétrique.*

- *Si* $x \leq y$ *et* $y \leq z$*, alors* $x \leq z$*, appelée la transitivité.*

Cette relation d'ordre est totale, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \text{ on a } x \leq y \text{ ou bien } y \leq x.$$

Définition 5 ***Corps ordonné***
La relation d'ordre $\leq$ *est compatible avec les opérations d'addition et de multiplication, c'est-à-dire :*
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R},$

- $x \leq y$ *implique* $x + z \leq y + z$.
- $x \leq y$ *et* $z \geq 0$ *implique* $x.z \leq y.z$.

Définition 6 ***Borne supérieure***
Soient $I \subset \mathbb{R}$ *(avec* $I \neq \emptyset$*) et* $x \in \mathbb{R}$.
On dit que :

x *est un majorant de* I*, si* $\forall y \in I,\ y \leq x$.
x *est un minorant de* I*, si* $\forall y \in I,\ x \leq y$.

Si I *possède un majorant (respectivement un minorant), on dit que* I *est majoré (respectivement minoré).*

On dit que x *est la borne supérieure de* I *(et nous notons alors* $x = \sup(I)$ *ou* $x = \sup\limits_{y \in I}(y)$*) si* x *est le plus petit des majorants de* I.

On définit de même une borne inférieure de I *comme le plus grand des minorants de* I.

Remarque 2
Une partie de $\mathbb{R}$ *ne peut avoir deux bornes supérieures (respectivement inférieures) distinctes.*

Remarque 3
On note que $\sup[0;1] = 1$ *et* $\sup[0;1[= 1$*. Ceci indique que la borne supérieure (respectivement la borne inférieure), peut appartenir ou non à l'ensemble.*

Proposition 1 ***Caractérisation de la borne supérieure dans*** $\mathbb{R}$
On considère I*, un intervalle de* $\mathbb{R}$.
$s = \sup(I)$ *si et seulement si* $\forall \epsilon > 0,\ \exists a \in I$ *tel que* $s - \epsilon < a \leq s$.

Démonstration.
La preuve s'effectue par double implication.

($\Rightarrow$) On utilise un raisonnement par l'absurde.
Si $s = \sup(I)$, on suppose que : $\exists \epsilon > 0$ tel que $x_0 = s - \frac{\epsilon}{2}$ et $x_0 \notin I$.
Alors $x_0 \in]s - \epsilon; s]$ et x_0 serait un majorant de I.
Donc, s ne serait pas la borne supérieure de I, ce qui est contraire à l'hypothèse.

($\Leftarrow$) On utilise aussi un raisonnement par l'absurde.
Si $\forall \epsilon > 0,\ \exists a \in I$ tel que $s - \epsilon < a \leq s$. On considère $s_1 \in \mathbb{R}$ un autre majorant de I.
Dans le même temps, on suppose que $s_1 < s$.
Puisque le résultat doit être vrai $\forall \epsilon > 0$, on peut choisir, $\epsilon = s - s_1 > 0$. Ainsi, $\exists a \in I$ tel

que, $s - \epsilon < a \leq s$.
Or, si $\epsilon = s - s_1$, on en déduit que $s_1 = s - \epsilon$. Ainsi, on obtient que

$$s_1 < a \leq s,$$

ce qui contredit l'hypothèse que s_1 est un majorant de I. Alors, s est la borne supérieure de I. ■

Définition 7 ***Axiome de la borne supérieure***
On dit qu'un ensemble E muni d'une relation d'ordre vérifie l'axiome de la borne supérieure, si toute partie majorée non vide de E admet une borne supérieure.

Définition 8 ***Le corps des réels***
Le corps des réels est un corps totalement ordonné qui vérifie l'axiome de la borne supérieure.

Remarque 4
A partir des différents éléments précédents, on peut définir d'autres ensembles.
$\mathbb{R}$ étant défini comme ci-dessus, on définit $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}$ comme les sommes finies de l'unité 1 ($2 = 1 + 1$; $3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1; \cdots; n = (n - 1) + 1$).
Puis, on définit $\mathbb{N}^* \cup \{0\}$; $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}^*) \cup \mathbb{N}$ et pour finir $\mathbb{Q} = \{p.q^{-1};\ p \in \mathbb{N};\ q \in \mathbb{N}^*\}$.

Proposition 2 $\mathbb{R}$ ***est archimédien***
$\forall a \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a < n$.

Démonstration.
• Si $a \leq 0$, il suffit de prendre $n = 1$.

• Si $a > 0$, alors on considère l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} \ \setminus \ k \leq a\}$.
A contient, au moins, l'élément 0. Donc, il n'est pas vide.
A est majoré par a et admet donc, une borne supérieure notée s.
$s - \frac{1}{2}$ n'est donc pas un majorant de A. Ainsi, il existe $k \in A$ tel que $s - \frac{1}{2} < k \leq s$.
En posant $n = k + 1$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} k & > & s - \frac{1}{2} \\ k + 1 & > & s + \frac{1}{2} \\ n & > & s + \frac{1}{2} \ > \ s. \end{array}$$

D'où $n > s$.
Si on suppose que $a \geq n$ alors on obtient que $n \in A$ et par conséquence que $s \geq n$, ce qui est contraire au résultat trouvé précédemment. Ainsi, on en déduit que $n > a$. ■

Proposition 3 $\mathbb{Q}$ ***est dense dans*** $\mathbb{R}$
$\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$.

Démonstration.
0n considère $\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$. D'après la proposition précédente, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q > \frac{1}{b-a}$.
D'où

$$\frac{1}{q} < b - a.$$

Toujours d'après la proposition précédente, pour $qb \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $qb \leq n$.
Ainsi, on en déduit que l'ensemble $B = \{n \in \mathbb{N}^* \ \setminus \ qb \leq n\}$ n'est pas vide.
Puisque $B \neq \emptyset$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p < qb \leq p + 1.$$

En divisant cette inégalité par $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \frac{p}{q} & < & b \leq \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \\ \\ \frac{p}{q} & < & b < \frac{p}{q} + (b-a). \end{array}$$

Ainsi, on en déduit à la fois que

$$\frac{p}{q} < b$$

et à la fois que

$$\begin{array}{rcl} b & < & \frac{p}{q} + (b-a) \\ \\ b-(b-a) & < & \frac{p}{q} \\ \\ a & < & \frac{p}{q}. \end{array}$$

Il en résulte que

$$a < \frac{p}{q} < b \quad \blacksquare$$

On a encore besoin de quelques définitions et propriétés.

Définition 9 ***Valeur absolue***
On définit la valeur absolue d'un réel a, de la manière suivante

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a \leq 0. \end{cases}$$

La valeur absolue possède les propriétés suivantes : $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$
- $|ab| = |a|.|b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(Inégalité triangulaire)*
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- $|a-b| < \epsilon \Longleftrightarrow \ b \in]a-\epsilon;\ a+\epsilon[$.

Définition 10 ***Caractérisation des intervalles***
On note $I = (a;b)$ avec $a < b$, un des intervalles de $\mathbb{R}$ où les parenthèses (et) remplacent [ou]. On note que a et b peuvent être $-\infty$ et $+\infty$. Un intervalle $(a;\ b)$ est donc l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ compris (éventuellement au sens large) entre a et b. Un intervalle $[a;\ b]$ avec a et b finis est dit un segment.

Proposition 4
Une partie non vide $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ x < y,\ [x;\ y] \subset I.$$

Autrement dit, le segment qui joint deux points de I est inclu dans I.
Cette propriété s'appelle la convexité. Ainsi, les parties convexes non-vides de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

1.2 Les suites

Une suite de nombres réels est une application

$$\begin{array}{rccc} U: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & U(n) = U_n \end{array}$$

Cette suite est notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 11 ***Suite convergente***
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (ou a pour limite) $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \ \textit{tel que } n \geq N(\epsilon) \implies |U_n - l| < \epsilon.$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \ \textit{tel que } n \geq N(\epsilon) \implies U_n \in]l - \epsilon;\ l + \epsilon[.$$

Remarque 5
Si une suite a une limite, celle-ci est unique.

Exemple 2
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_n = (-1)^n(\frac{n}{n^2+1}) + 2.$$

De manière évidente, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.
Si on utilise la définition de la convergence d'une suite et qu'on la retranscrit sur un graphique, on en déduit qu'à partir d'un certain rang $N(\epsilon)$, tous les points de la suite sont compris entre $l+\epsilon$ et $l-\epsilon$ ($l = 2$ dans notre exemple).

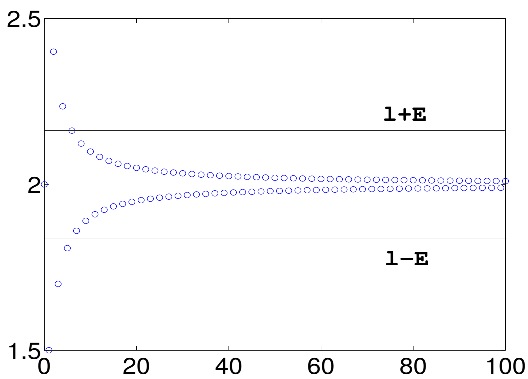

FIG. 1.2 – $(U_n)_n$ converge vers 2

Remarque 6

- *Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.*
  Mais attention, la réciproque est fausse si $l \neq 0$. Par exemple, la suite $(U_n = (-1)^n)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas alors que la suite $(|U_n| = 1)_{\mathbb{N}}$ converge.
- *Dans le cas où $l = 0$, il est aisé de constater que la réciproque est vraie. En effet, pour le vérifier, il suffit d'utiliser l'inégalité suivante :*

  $$-|U_n| \leq U_n \leq |U_n|.$$

  Avec le théorème des gendarmes, si $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Définition 12

• *On dit qu'une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $+\infty$ *si :*

$$\forall A>0;\ \exists N(A)\in\mathbb{N}\ \textit{ tel que }\ n\geq N(A) \Longrightarrow U_n\geq A.$$

• *On dit qu'une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $-\infty$ *si :*

$$\forall A<0;\ \exists N(A)\in\mathbb{N}\ \textit{ tel que }\ n\geq N(A) \Longrightarrow U_n\leq A.$$

• *On dit qu'une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante (respectivement décroissante) si* $U_n\leq U_{n+1}$ *(respectivement* $U_n\geq U_{n+1}$*).*

• *On dit qu'une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Théorème 1 ***Suites monotones***

Toute suite monotone a une limite finie ou infinie :

1. *Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante :*

   a. *Si l'ensemble* $U(\mathbb{N})$ *des valeurs de la suite est majoré, alors la suite converge vers la borne supérieure de* $U(\mathbb{N})$.
   b. *Si l'ensemble* $U(\mathbb{N})$ *des valeurs de la suite n'est pas majoré, alors la suite converge vers* $+\infty$.

2. *Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante :*

   a. *Si l'ensemble* $U(\mathbb{N})$ *des valeurs de la suite est minoré, alors la suite converge vers la borne inférieure de* $U(\mathbb{N})$.
   b. *Si l'ensemble* $U(\mathbb{N})$ *des valeurs de la suite n'est pas minoré, alors la suite converge vers* $-\infty$.

Démonstration.

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante :
a. Si l'ensemble $U(\mathbb{N})\subset\mathbb{R}$ est majoré, alors il admet une borne supérieure, notée s.
Ainsi, $\forall\epsilon>0$, $s-\epsilon$ n'est pas un majorant. Alors, il existe un entier $N(\epsilon)$ tel que $s-\epsilon<U_{N(\epsilon)}\leq s$.
Puisque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que s est un majorant, on en déduit que :

$$\forall n>N(\epsilon),\ \underbrace{s-\epsilon<U_{N(\epsilon)}\leq U_n\leq s<s+\epsilon.}_{\Rightarrow|U_n-s|<\epsilon}$$

D'où,

$$\forall\epsilon>0,\exists N(\epsilon)\in\mathbb{N},\quad \text{tel que } \forall n>N(\epsilon),\ \Longrightarrow |U_n-s|<\epsilon.$$

Ainsi, on a obtenu la définition de la convergence.

Si l'ensemble $U(\mathbb{N})$ n'est pas majoré, cela signifie que pour tout $A>0$, A n'est pas un majorant de $U(\mathbb{N})$. Donc, il existe un entier $N(A)\in\mathbb{N}$ tel que $A<U_{N(A)}$.
Puisque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que pour tout $n\geq N(A)$ alors $A\leq U_n$.
Ainsi, on obtient que

$$\forall A>0,\ \exists N(A)\in\mathbb{N}\ \text{ tel que } \forall n\geq N(A)\Longrightarrow U_n\geq A.$$

Ce qui signifie que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.