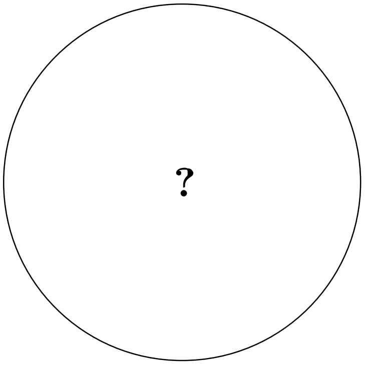
Chapitre 1

L'œil et l'outil

1 Le compas dans l'œil

1.1 Comment trouver le centre d'un cercle

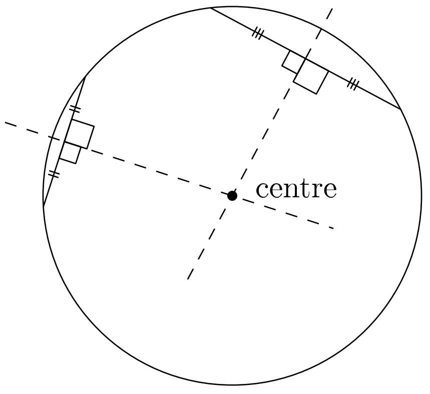
Soit un cercle tracé dans le plan dont on demande de localiser le centre.



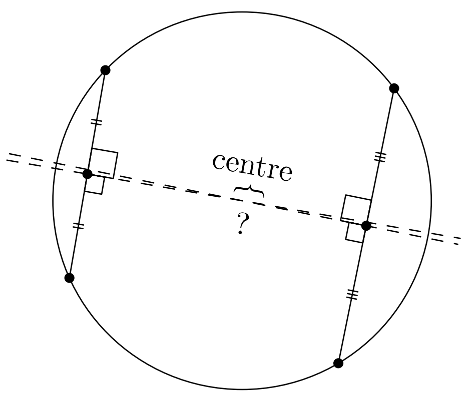
Ainsi formulée, la question est trop vague, car la réponse dépend beaucoup des outils que l'on s'autorise pour y répondre. Par exemple, si l'on n'autorise que l'usage du compas, on a affaire au « problème de Napoléon »[1]. Avec les outils ordinaires la géométrie que sont la règle, le compas et l'équerre, on peut proposer au moins deux solutions distinctes et très simples. La première n'utilise qu'une propriété particulièrement élémentaire du cercle : le fait que

1. L'origine de ce problème semble à chercher du côté du mathématicien Lorenzo Mascheroni, qui fut un ami de l'empereur.

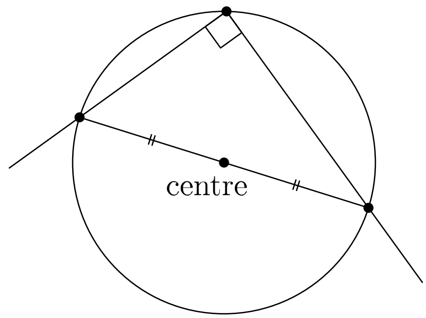
la médiatrice d'une corde passe par le centre. L'intersection des médiatrices de deux cordes non parallèles donne donc le centre cherché.



En plus de la question des outils autorisés se pose celle de la précision du tracé. Ici, pour localiser le centre avec un maximum d'exactitude, il convient d'éviter que les cordes choisies soient parallèles ou presque parallèles. En effet, si les cordes ont des directions trop voisines, alors tel est également le cas des médiatrices, ce qui, compte-tenu de l'inévitable épaisseur du tracé, augmente l'incertitude sur leur intersection.



Une seconde construction consiste à choisir sur le cercle un point que l'on prend comme sommet d'un angle droit dont les côtés coupent le cercle en deux autres points. D'après le théorème de l'angle inscrit, le milieu de ces derniers est le centre du cercle.



De telles constructions sont intéressantes du point de vue géométrique en ce sens qu'elles mettent en relief des propriétés fondamentales du cercle : propriétés de symétries pour la première, théorème de l'angle inscrit pour la seconde. Elles ont pourtant leurs limites. Considérons en effet le test qui consiste à donner à un sujet un cercle dessiné sur une feuille et à lui demander de piquer à l'aide d'une pointe sur l'endroit où il estime être le centre. Il est certes difficile de savoir comment le cerveau procède pour répondre à une telle question, mais il n'en reste pas moins très improbable que notre cobaye se représente mentalement deux cordes puis leurs médiatrices dont il localiserait l'intersection. Il est plus vraisemblable que le cerveau procède par approximations successives : un point M semblant un bon candidat, l'œil peut faire le tour du cercle à la recherche de deux points (plus ou moins diamétralement opposés) dont les distances à M apparaissent différentes, ce qui permet d'ajuster la position.

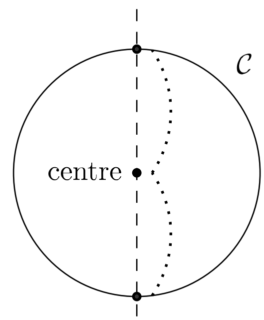
Les caractéristiques des méthodes géométriques sont donc aussi dissemblables que possibles de celles (même mal cernées) de la localisation visuelle. Les premières incarnent la rigueur et la précision mathématique des constructions à la règle et au compas. Elles exploitent des propriétés fondamentales du cercle qu'il est absolument indispensable de connaître pour progresser en géométrie. En revanche, elles tombent en quelque sorte du ciel, au sens où il nous reste difficile de les intérioriser pour de bon : même lorsqu'on les connaît, on ne les utilise pas pour localiser visuellement le centre d'un cercle. Quelles que soient les modalités précises (qu'un spécialiste expliquerait peut-être) des procédés cérébraux à l'œuvre pour localiser intuitivement le centre, elles sont si peu définies pour tout un chacun qu'il est probable que l'homme de la rue serait incapable d'en expliquer en détail les ressorts, alors même qu'il est certainement capable de réussir le test avec une précision tout à fait acceptable.

C'est un enjeu considérable de l'enseignement que de dépasser l'antagonisme entre ces points de vue, de réconcilier les méthodes en préservant leurs qualités tout en en surmontant leurs limites. Tentons de le faire dans notre exemple du centre d'un cercle, en réfléchissant à une méthode intermédiaire qui soit à la fois théoriquement correcte et adaptée à la perception courante des objets géométriques. Nous supposons, hypothèse qu'il faudrait confronter à la réalité neurologique, que notre œil est capable de localiser raisonnablement bien :

- un axe de symétrie vertical (c'est-à-dire orienté selon le plan de symétrie du corps) ;

- le milieu de deux points.

Pour placer mentalement le centre d'un cercle $\mathcal{C}$, on peut alors tâcher de localiser l'axe de symétrie vertical de $\mathcal{C}$, puis les deux points d'intersection de cet axe avec $\mathcal{C}$, et enfin le milieu de ces deux points.



D'autres possibilités sont bien sûr envisageables. Le lecteur pourra, par exemple, réfléchir à partir des hypothèses que l'œil localise bien les points les plus « haut », les plus « bas », les plus « à gauche » et les plus « à droite » d'une figure, et qu'il est aussi capable de placer correctement, deux paires de points étant donnés, l'intersection des deux droites que ces paires définissent.

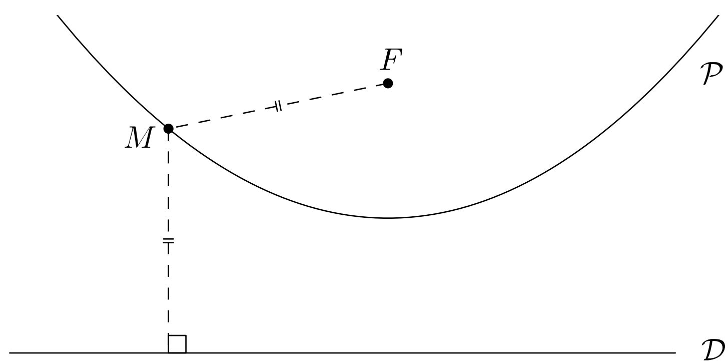
Quelle que soit la construction que le lecteur retiendra pour lui-même entre les deux précédentes ou une autre de son choix, l'important est que nous avons bel et bien trouvé une voie médiane entre le tout rationnel et le tout perceptif. La rigueur est là et bien là (le centre du cercle est effectivement le milieu d'une corde définie par un axe de symétrie), mais elle n'est pas désincarnée car elle s'appuie sur des outils que la perception reconnaît comme siens. La localisation « à vue » a remplacé la construction à la règle et au compas, mais sans sacrifier l'exactitude mathématique. Tel est peut-être une bonne description de l'état d'esprit qui animait Feynman dans son travail d'enseignant, que ce soit dans son célèbre *Cours de physique* ou dans sa démonstration géométrique des lois de Kepler.

Piste de réflexion 1. *Réfléchir à la possibilité d'une axiomatisation rigoureuse des possibilités géométriques de notre œil, et/ou un « programme d'entraînement » qui en augmenterait efficacement les facultés.*

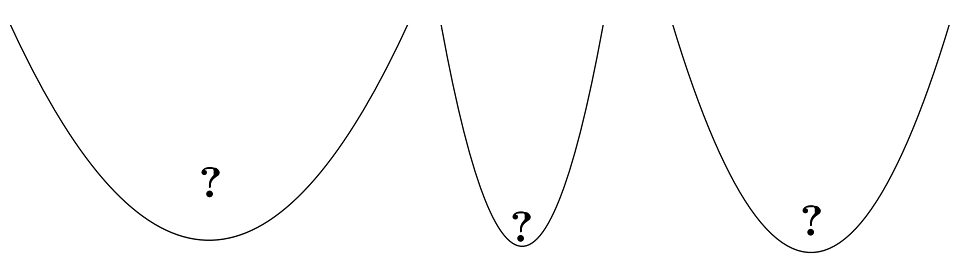
1.2 Le chemin vers le foyer

Les coniques offrent des exemples naturels pour poursuivre la réflexion sur ces questions de constructions géométriques « à l'œil ». Le cas le plus simple est celui de la *parabole*, dont pour commencer nous retenons, parmi les multiples définitions équivalentes, la plus courante, dite *monofocale* :

Définition 1. *Soit F un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par F. La* parabole *de* foyer *F et de* directrice *$\mathcal{D}$ est l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M du plan tels que $MF = d(M, \mathcal{D})$ (distance de M à la droite $\mathcal{D}$).*



Une parabole $\mathcal{P}$ étant dessinée sans son foyer ni sa directrice, nous nous posons la question, comme pour le cercle, de trouver un moyen visuel de les localiser. Pour ce faire, il nous faut d'une manière ou d'une autre exploiter des propriétés géométriques de $\mathcal{P}$, de même que nous nous sommes servis des propriétés de symétrie du cercle pour en localiser visuellement le centre.

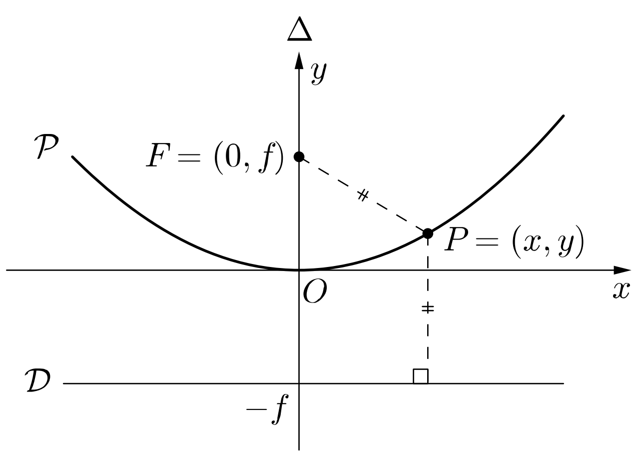


La rigueur mathématique pourrait nous conduire, à l'instar de notre première solution pour le cercle, à rechercher une construction géométrique à la règle et au compas qui réponde précisément au problème. De telles constructions existent, bien sûr. Elles mettent en scène des propriétés fondamentales de la parabole, aussi indispensables pour leur étude que la propriété des médiatrices des cordes ou le théorème de l'angle inscrit le sont pour l'étude du cercle. Il s'agit toutefois pour nous de chercher autre chose : des propriétés les plus épurées possibles permettant des manipulations géométriques que notre œil puisse à lui seul reconstituer avec une précision raisonnable.

Pour cela, remarquons tout d'abord que la parabole possède un unique axe de symétrie : la droite Δ perpendiculaire à la directrice et passant par le foyer (un raisonnement mathématique le démontre sans peine [1]). Notre œil se représente facilement cet axe. Quitte à tourner la parabole, nous la supposons disposée de sorte à ce que Δ soit vertical.

Une fois localisé l'axe de symétrie, l'œil dispose donc d'une première droite contenant F. Tout le problème est d'en trouver une seconde. Il est naturel de la chercher parmi les perpendiculaires à Δ, ce qui nous ramène à la détermination d'une propriété caractéristique visuellement repérable des points d'intersections G et G' de $\mathcal{P}$ avec la perpendiculaire à Δ passant par F.

Ce problème en tête, prenons un instant le point de vue algébrique. Le plan est muni d'un repère cartésien (Oxy), où (Oy) est porté par Δ et où O est le *sommet* de la parabole, c'est-à-dire l'intersection de $\mathcal{P}$ et Δ. (Comme on s'en doute, l'axe (Ox) est choisi orthogonal à (Oy), et donc parallèle à $\mathcal{D}$.)

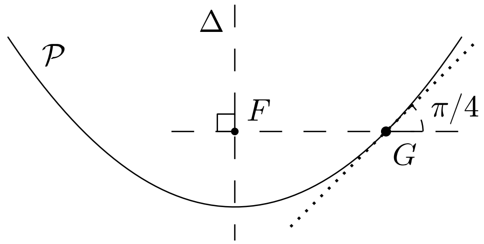


Notons $(0, f)$ les coordonnées de F (avec $f > 0$) : la droite $\mathcal{D}$ a donc pour

1. Soit P un point de $\mathcal{P}$ et P' son symétrique par rapport à Δ. Par définition, on a $PF = d(P, \mathcal{D})$. Puisque $F \in \Delta$, on a $PF = P'F$. D'autre part, puisque $\mathcal{D}$ est globalement invariante par la symétrie, on a aussi $d(P, \mathcal{D}) = d(P', \mathcal{D})$, et donc $P'F = d(P', \mathcal{D})$, c'est-à-dire que $P' \in \mathcal{P}$ et que Δ est donc bien axe de symétrie de $\mathcal{P}$. Exercice complémentaire laissé au lecteur : montrer que $\mathcal{P}$ n'a pas d'autre axe de symétrie.

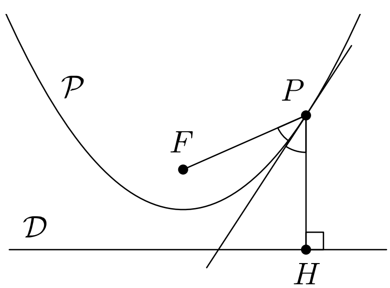
équation $y = -f$.[1] Soit $P = (x, y) \in \mathcal{P}$. L'égalité $PF^2 = d(P, \mathcal{D})^2$ s'écrit donc $x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2$, qui, après simplification, nous donne cette équation de $\mathcal{P}$: $y = x^2/4f$. Notons $\pm g$ les abscisses des points G et G'. On a donc $f = g^2/4f$, une équation qui se résout en $g = \pm 2f$, d'où $G = (2f, f)$.

En dérivant y, on obtient que la pente de la tangente à $\mathcal{P}$ au point (a, a^2) est égale à $a/2f$. En particulier, *au point G la pente est égale à* 1, et c'est là une remarquable propriété que notre œil peut utiliser.



Avec un peu d'entraînement, il nous est en effet possible d'identifier à peu près bien la direction correspondant à une pente 1 (autrement dit un angle de $\pi/4$ avec (Ox), encore autrement dit la (une) bissectrice de l'angle défini par l'horizontale et la verticale). En faisant glisser notre regard le long de $\mathcal{P}$ et en évaluant en chaque point la direction de la tangente, il est possible de localiser le point G pour lequel cette direction a à peu près le bon angle. Une fois G trouvé, sa projection orthogonale sur Δ, raisonnablement simple à faire à l'œil, donne finalement le foyer F.

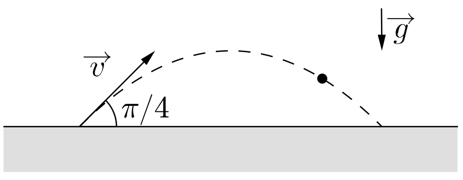
On peut reprocher au raisonnement précédent de faire la part trop belle à l'algèbre (dans le calcul d'une équation de $\mathcal{P}$) et à l'analyse (dans la dérivation de cette équation). Si nous voulons nous en tenir à des méthodes géométriques, nous pouvons obtenir le résultat précédent à l'aide d'une propriété fondamentale de la parabole, la *propriété de réflexion*, que nous admettons pour l'instant (elle sera démontrée en section 3) : en tout point P d'une parabole $\mathcal{P}$, la tangente est égale à la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PH})$, où H est la projection orthogonale de P sur la directrice $\mathcal{D}$. Lorsque P est choisi de sorte que $(PF) /\!\!/ \mathcal{D}$, l'angle $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PH})$ est droit, et le résultat s'ensuit.



1. En effet, $\mathcal{D}$ doit être invariante par la symétrie d'axe Δ et elle ne se confond pas avec lui, elle est donc parallèle à (Ox) ; d'autre part, on doit avoir $f = OF = d(O, \mathcal{D})$.

Cette propriété visuelle du point G peut à son tour appuyer un point de vue algébrique, en donnant un moyen très simple et très rapide de déterminer les coordonnées (x_F, y_F) du foyer d'une parabole dont l'équation est donnée par $y(x) = ax^2 + bx + c$. Pour x_F tout d'abord, il suffit de remarquer que F est à la verticale de l'extremum de la fonction $y(x)$, donc que x_F vérifie $y'(x_F) = 0$ et donc, par un calcul immédiat, $x_F = -b/2a$. Pour y_F, on recherche le point de dérivée 1, c'est-à-dire qu'on résout l'équation $y'(x) = 1$, qui admet pour solution $x = (1-b)/2a$: on a alors $y_F = y((1-b)/2a) = (1-\Delta)/4a$, où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Loin de n'être qu'une remarque anecdotique, le fait que les points G et G' correspondent aux points de la parabole dont les tangentes sont de pente 1 et -1 fournit un moyen très efficace pour simplifier certains calculs. Cette propriété dispose aussi d'une importante interprétation en mécanique, qui fera l'objet du corollaire 1 (page 52) : à vitesse initiale fixée, le point de retombée le plus éloigné possible d'un projectile lancé du sol et soumis à l'attraction de la pesanteur $\overrightarrow{g}$ est atteint pour un angle de tir de $\pi/4$.



1.3 Les cordes focales, ces faux diamètres

Le segment $[GG']$ construit plus haut, qui est de longueur $4f$, s'appelle le *latus rectum* de la parabole. Dans une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, le coefficient a s'interprète (au signe près) comme l'inverse de sa longueur.[1] Le *latus rectum* « résume » à lui seul la parabole toute entière, au sens où, deux points G et G' étant donnés, il n'existe que deux paraboles du plan euclidien dont $[GG']$ soit le *latus rectum* — ces deux paraboles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à (GG').[2] Pour le démontrer, soit $\mathcal{P}$ une parabole de *latus rectum* $[GG']$. Le foyer F de $\mathcal{P}$ est donc le milieu de $[GG']$ (et l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$ la médiatrice de $[GG']$). La directrice de $\mathcal{P}$ est donc l'une ou l'autre des deux parallèles à (GG') à distance $GG'/2$ de F.

1. En effet, nous avons vu en fin de section précédente que l'abscisse de G est $(1-b)/2a$. En résolvant l'équation $y'(x) = -1$ (ou par un argument de symétrie par rapport à Δ), on trouve que celle de G' est $(-1-b)/2a$. On a donc, par simple soustraction, que $GG' = 1/|a|$.

2. Pour récupérer de l'unicité, on peut convenir d'une orientation, en imposant par exemple que la base $\{\overrightarrow{GG'}, \overrightarrow{GS}\}$ soit directe, S étant le sommet de la parabole.