Chapitre 1
Espaces vectoriels réels

Les espaces vectoriels ont été introduits par **Cayley** et **Grassmann** au milieu du XIX^{e} siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n-uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe **Peano** de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes. Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré. On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.

Giuseppe Peano
1858-1932

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Connaître les espaces vectoriels de référence.

▷ Savoir reconnaître un sous-espace vectoriel.

▷ Connaître les notions de familles libres et liées.

▷ Connaître la notion de famille génératrice et de sous-espace vectoriel engendré.

▷ Connaître la notion de base et savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

▷ Connaître les dimensions des espaces vectoriels de référence et savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel "simple".

■ Et plus si affinités

▷ Savoir montrer la liberté de certaines familles de suites ou de fonctions.

■■ Résumé de cours

■ Espaces vectoriels

Il s'agit de développer la notion d'espace vectoriel, introduite dans le cours de 1[ère] année. A cet effet, le lecteur est invité à relire le **chapitre 8** du livre de 1[ère] année dans lequel est donnée, entre autres, la définition d'un espace vectoriel (**définition 8.2**). En première année, le champ d'étude des espaces vectoriels se limite à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec n entier de $\{1,2,3,4\}$. Le paragraphe ci-dessous présente les espaces vectoriels qui font référence en seconde année. Pour chacun d'eux, sont précisées les lois de composition interne et externe en vigueur dans cet espace.

❑ Espaces vectoriels de référence

Théorème 1.1. — Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.1. — Si on note $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, les lois sur $\mathbb{R}^n$ sont définies par : $x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ et, pour tout réel λ, $\lambda x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$.

Théorème 1.2. — Pour tout (n,p) de $(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.2. — Les lois en vigueur sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont l'addition des matrices et la multiplication d'une matrice par un scalaire. Elles sont définies dans le **chapitre 6** du livre de 1[ère] année. Si $p=1$ et si n est un entier de $\{1,2,3,4\}$, on retrouve le cadre du programme de 1[ère] année.

Théorème 1.3. — L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites numériques réelles est un espace vectoriel.

Remarque 1.3. — Les lois en vigueur sur $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ sont définies de la manière suivante : pour tout couple (u, v) de suites de $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, $u+v$ est la suite de $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ dont le terme général est u_n+v_n et, pour tout réel λ, λu est la suite de $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ dont le terme général est λu_n.

Théorème 1.4. — Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$ des applications de A dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.4. — Les lois en vigueur sur $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$ sont définies de la manière suivante : pour tout couple (f, g) d'applications de $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$, $f+g$ est l'application de $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$ définie pour

tout x de A, par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ et, pour tout réel λ, λf est l'application de $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$ définie, pour tout x de A, par $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.
Dans toute la suite de ce chapitre, la lettre E désigne un espace vectoriel.

❑ Sous-espaces vectoriels

On rappelle la définition et la caractérisation d'un sous-espace vectoriel de E, déjà énoncées dans le livre de 1$^{\text{ère}}$ année.

Définition 1.1. — On appelle *sous-espace vectoriel* de E ou *sous-espace* de E, toute partie F non vide de E telle que :
- $\forall (x,y)\in F^2,\ x+y\in F$ (on dit que F est stable pour l'addition).
- $\forall (\lambda,x)\in \mathbb{R}\times F,\ \lambda x\in F$ (on dit que F est stable pour la multiplication par un scalaire).

Théorème 1.5. — F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F est une partie non vide de E.
- $\forall (x,y)\in F^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda x+y\in F$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ?**

Propriété 1.1. — Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Théorème 1.6. — L'ensemble des fonctions polynomiales (ou polynômes) à coefficients réels, noté $\mathbb{R}[X]$, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications définies sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.7. — L'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n étant un entier naturel), noté $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Propriété 1.2. — Tout sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel.

■ Familles de vecteurs

❑ Combinaisons linéaires

Définition 1.2. — Soit p un entier naturel non nul et $\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des p vecteurs de $\mathcal{F}$ s'il existe p scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que : $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i$ (les λ_i sont les *coefficients* de la combinaison linéaire).

Remarque 1.5. — Le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quels vecteurs.

❑ Familles génératrices

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Théorème 1.8. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. Il est noté Vect $\mathcal{F}$ ou Vect $(e_1, \ldots, e_p)$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer, à l'aide d'une famille génératrice, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de *E* ?**

Propriété 1.3. — Si $F = \text{Vect}\ (e_1, \ldots, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$, alors $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. En particulier, $\text{Vect}\ (e_1, \ldots, e_p, 0_E) = \text{Vect}\ (e_1, \ldots, e_p)$.

Propriété 1.4. — Si $F = \text{Vect}(\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_p e_p)$ et si les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont tous non nuls, alors $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

❑ Familles libres

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille libre*, ou que les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ sont *linéairement indépendants*, si toute combinaison linéaire nulle de $e_1, \ldots, e_p$ ne peut s'écrire qu'avec des scalaires tous nuls.

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est libre si : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \ \Rightarrow\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0$.

Propriété 1.5. — Soit x un vecteur de E.
La famille (x) est libre si, et seulement si, x est différent de 0_E.

Propriété 1.6. — Soit x et y deux vecteurs de E.
La famille (x, y) est libre si, et seulement si, x et y ne sont pas proportionnels.

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer qu'une famille est libre ?**

Propriété 1.7. — Toute famille contenue dans une famille libre de E est libre.

❑ Familles liées

Définition 1.5. — Une famille *liée* est une famille qui n'est pas libre.

Propriété 1.8. — Une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Propriété 1.9. — Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Propriété 1.10. — Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille liée est liée.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer qu'une famille est liée ?**

❑ Bases

Définition 1.6. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une *base* de E si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

⇨ **Méthode 1.5. (1) Comment montrer qu'une famille est une base ?**

Propriété 1.11. — La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}$ tel que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Vocabulaire. — Les réels $x_1, \dots, x_n$ sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

■ Espaces vectoriels et dimension

❑ Théorème de la dimension

Théorème 1.9. — Théorème de la dimension.
Si l'espace vectoriel E possède une base formée de n vecteurs (avec n dans $\mathbb{N}^*$), alors toutes les bases de E ont exactement n vecteurs.

Définition 1.7. — Le nombre n de vecteurs, commun à toutes les bases de E, est appelé *dimension* de E. On dit que E est de dimension n et on note : $\dim E = n$.

Remarque 1.6. — On dit alors que E est de dimension finie.
Remarque 1.7. — Par convention, si l'espace E est réduit au seul vecteur 0_E , $\dim E = 0$.
Vocabulaire — Tout espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite. Tout espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan.

❑ Dimension des espaces vectoriels de référence

Théorème 1.10. — $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathbb{R}^n = n$.
Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, on note $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé de zéros sauf un 1 en $i^{\text{ème}}$ position. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.11. — $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$.
Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la croisée de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.12. — $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.
Pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, on note e_i la fonction définie, pour tout réel x, par $e_i(x) = x^i$. La famille $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 1.8. — La fonction $e_i : x \mapsto x^i$ est parfois notée, de manière symbolique, X^i.
La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit alors : $(1, X, ..., X^n)$.

❑ Théorème de la base incomplète

Théorème 1.13. — Théorème de la base incomplète. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Toute famille libre $(e_1, \ldots, e_p)$ de p vecteurs de E $(p < n)$ peut être complétée par $n-p$ vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de E, de telle sorte que la famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

Théorème 1.14. — Soit E un espace vectoriel de dimension n.
- Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

Théorème 1.15. — Soit E un espace vectoriel de dimension n.
- Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.
- Toute famille génératrice formée de n vecteurs de E est une base de E.

⇨ **Méthode 1.5. (2) Comment montrer qu'une famille est une base ?**

❑ Sous-espaces vectoriels et dimension

Propriété 1.12. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et on a : $\dim F \le \dim E$.

Théorème 1.16. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

■■ Méthodes

■ Structure d'espace vectoriel

❑ Méthode 1.1. Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ?

Montrer qu'un ensemble F est un sous-espace d'un espace vectoriel E, c'est montrer les points suivants :

- F est une partie de E et F n'est pas vide (on peut vérifier que 0_E appartient à F).
- $\forall(x,y)\in F^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda x+y\in F$.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.14, 1.15**

Remarque. Lorsqu'on demande de montrer que F est un espace vectoriel, on cherche à montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence en utilisant la méthode ci-dessus. Puis on conclut que F est lui-même un espace vectoriel selon la **propriété 1.2**.

Exemple 1. Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+3y-z=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- F est, par définition, inclus dans $\mathbb{R}^3$ et F n'est pas l'ensemble vide car : $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F$.
- Soit $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$ des éléments de F.

On sait, par définition de F, que : $x+3y-z=0$ et $x'+3y'-z'=0$.
De plus, pour tout réel λ, $\lambda u+u'=(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')$ et on a :
$(\lambda x+x')+3(\lambda y+y')-(\lambda z+z')=\lambda(x+3y-z)+(x'+3y'-z')=0$ donc $\lambda u+u'\in F$.
Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2. Montrer que l'ensemble E des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n ($n\in\mathbb{N}^*$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- E est bien une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et E n'est pas vide puisque la matrice nulle est symétrique.
- Soit deux matrices M et N de E et λ un réel. Montrons que : $\lambda M+N\in E$.

Par linéarité de la transposition (livre de première année), on a : ${}^t(\lambda M+N)=\lambda\,{}^tM+{}^tN$.
Comme M et N sont symétriques, on en déduit : ${}^t(\lambda M+N)=\lambda M+N$, ce qui prouve que la matrice $\lambda M+N$ est symétrique.
E est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.