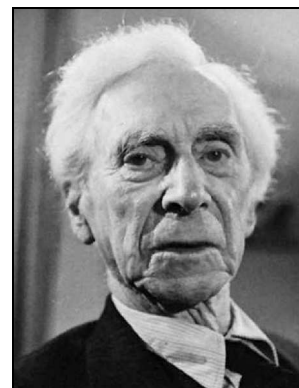


# Chapitre 1

# Raisonnements Mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier  $\cap$  et  $\cup$  désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note  $\exists$ , renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



**Bertrand Russell**  
1872-1970

## ■■ Objectifs

### ■ Les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.
- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence forte (ou généralisée).
- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

### ■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir raisonner par contraposée.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.
- ▷ Savoir écrire la négation d'une proposition.

## ■ ■ Résumé de cours

### ■ Les éléments du raisonnement

#### □ Proposition

**Définition 1.1.** — On appelle *proposition* toute phrase  $\mathcal{P}$  dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable  $x$ , nous pourrons la noter  $\mathcal{P}(x)$ .

**Remarque 1.1** — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$  est vraie".

**Exemple 1.1.** — Pour tout réel  $x$  strictement positif, " $\ln(x) > 0$ " est une proposition dépendante de la variable  $x$ . Elle est vraie si  $x > 1$ , et fausse sinon.

**Exemple 1.2.** — "*La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante*" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier  $n$ .

**Exemple 1.3.** — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

**Exemple 1.4.** — Pour tout réel  $x$ , " $(2x+1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

#### □ Quantificateurs

**Notation** — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable  $x$  signifie "*quel que soit  $x$ ...*".

Le signe " $\exists$ " placé devant une variable  $x$  signifie "*il existe (au moins) un  $x$ ...*".

Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable  $x$  signifie "*il existe un unique  $x$ ...*".

" $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ " se lit : "*quel que soit le réel  $x$ ,  $x^2 + 1$  est strictement positif*" ou "*pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1$  est strictement positif*".

" $\exists x \in ]0, +\infty[, x^2 - 6x + 1 = 0$ " se lit : "*il existe au moins un réel  $x$  strictement positif tel que  $x^2 - 6x + 1$  est égal à 0*" (il y a d'ailleurs deux tels  $x$  :  $3 + 2\sqrt{2}$  et  $3 - 2\sqrt{2}$ ).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(n+1)}{2} = 3$ " se lit : "*il existe un unique entier naturel  $n$  non nul tel que  $\frac{n(n+1)}{2}$  est égal à 3*" (il s'agit du nombre 2).

**Remarque 1.2.** — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un  $x$* " signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

**Propriété 1.1.** — En général, la proposition  $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x, y))$  est différente de  $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x, y))$ .

**Exemple 1.5.** — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel  $x$ , il existe un entier  $n$ , tel que  $x$  soit compris entre  $n$  et  $n+1$ , cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de  $x$ ). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

**Remarque 1.3.** — Dans l'expression " $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \dots$ ", il faut noter que  $x$  dépend de  $y$ , on devrait en toute rigueur le noter  $x_y$  ou  $x(y)$ , ce que l'on ne fait presque jamais.

### □ Connecteurs logiques

**Définition 1.2.** — La proposition contraire de  $\mathcal{P}$ , notée  $\text{non } \mathcal{P}$  et appelée *négation* de  $\mathcal{P}$ , est la proposition qui est vraie lorsque  $\mathcal{P}$  est fausse et qui est fausse lorsque  $\mathcal{P}$  est vraie.

**Propriété 1.2.** — La négation de  $(\forall x, \mathcal{P}(x))$  est la proposition  $(\exists x, \text{non } \mathcal{P}(x))$ .

La négation de  $(\exists x, \mathcal{P}(x))$  est la proposition  $(\forall x, \text{non } \mathcal{P}(x))$ .

**Exemples 1.6.** — Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".

La négation de " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " est : " $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$  ou  $x \geq n+1$ ".

La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier  $n$  qui est la *partie entière* de  $x$  (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel  $x$  tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle  $]x-1, x]$ .

**Définition 1.3.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On appelle *disjonction* de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  la proposition  $(\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{Q})$ , le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit  $\mathcal{P}$ , soit  $\mathcal{Q}$ , soit les deux).

**Exemple 1.7.** — Pour un dé lancé, on considère  $\mathcal{P}$  : "*le numéro sorti est pair*", et  $\mathcal{Q}$  : "*le numéro sorti est supérieur ou égal à 3*". Alors,  $(\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{Q})$  est : "*le numéro sorti est 2, 3, 4, 5 ou 6*".

**Définition 1.4.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On appelle *conjonction* de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  la proposition  $(\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q})$  (les deux simultanément).

**Exemple 1.8.** — En reprenant l'**exemple 1.7**,  $(\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q})$  est : "*le numéro sorti est 4 ou 6*".

**Définition 1.5.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On dit que  $\mathcal{P}$  *implique*  $\mathcal{Q}$ , et on note  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ , lorsque, si  $\mathcal{P}$  est vraie, alors  $\mathcal{Q}$  est vraie (l'implication  $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$  est appelée *réciproque* de  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ).

**Vocabulaire** — Lorsque  $\mathcal{P}$  implique  $\mathcal{Q}$ , on dit que  $\mathcal{P}$  est une condition suffisante de  $\mathcal{Q}$ , et que  $\mathcal{Q}$  est une condition nécessaire de  $\mathcal{P}$ .

**Exemple 1.9.** — Pour tout réel  $x$ , on a :  $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$  (l'implication réciproque est fausse).

**Définition 1.6.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On dit que  $\mathcal{P}$  *équivalent* à  $\mathcal{Q}$  (ou que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont équivalentes), et on note  $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ , lorsqu'on a, à la fois,  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ .

**Vocabulaire** — Lorsque  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont équivalentes, on dit que  $\mathcal{P}$  est vraie si, et seulement si,  $\mathcal{Q}$  est vraie. On dit aussi que  $\mathcal{P}$  est une *condition nécessaire et suffisante* de  $\mathcal{Q}$ .

⇒ **Méthode 1.2.** Comment montrer une équivalence par double implication ?

**Exemple 1.10.** —  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (\ln a < \ln b) \Leftrightarrow (a < b)$ .

**Exemple 1.11.** — Pour tout entier  $n$ ,  $n$  est multiple de 6 si, et seulement si,  $n$  est multiple à la fois de 2 et de 3.

## ■ Différents types de raisonnements

### □ La contraposition

**Définition 1.7.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. L'implication  $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$  s'appelle la *contraposée* de l'implication  $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ .

**Exemple 1.12.** — La contraposée de la proposition "*s'il pleut, alors le sol est mouillé*" est "*si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas*".

**Théorème 1.1.** — Une implication et sa contraposée sont équivalentes : montrer que  $\mathcal{P}$  implique  $\mathcal{Q}$  revient à montrer que si  $\mathcal{Q}$  n'est pas vraie, alors  $\mathcal{P}$  n'est pas vraie.

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$$

**Remarque 1.4.** — L'exercice 1.4 (question 1) propose un exemple de raisonnement par contraposition.

### □ Démonstration par l'absurde

**Théorème 1.2.** — Quelles que soient les propositions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ , pour montrer que  $\mathcal{P}$  implique  $\mathcal{Q}$ , on suppose que  $\mathcal{P}$  est vraie, et on montre qu'il est alors impossible que  $\mathcal{Q}$  soit fausse.

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ et non } \mathcal{Q}) \text{ est fausse})$$

⇒ **Méthode 1.1.** Comment montrer une proposition par l'absurde ?

**Remarque 1.5.** — L'idée de la démonstration par l'absurde est très simple : pour montrer que  $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ , on suppose que  $\mathcal{P}$  est vraie et que  $\mathcal{Q}$  est fausse, puis on cherche à établir une contradiction.

### □ Démonstration par récurrence

#### Récurrence simple

**Théorème 1.3.** — Pour un entier naturel  $n$ , considérons une proposition  $\mathcal{P}(n)$ .

Si  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie et si, pour un entier naturel  $n$  **fixé supérieur ou égal à  $n_0$** , la proposition  $\mathcal{P}(n)$  implique la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$ , alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

⇒ **Méthode 1.3.** Comment montrer une proposition par récurrence ?

**Vocabulaire.** — La preuve de  $\mathcal{P}(n_0)$  s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication  $(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie})$  s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

**Attention !** Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n$ . C'est pour un entier  $n$  **fixé** que l'on montre que, si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.

**Remarque 1.6.** — La plupart du temps, on a  $n_0 = 0$  ou  $n_0 = 1$ .

### Récurrance finie

Il se peut qu'on ait à montrer une proposition  $\mathcal{P}(n)$ , non pas pour tout entier naturel  $n$ , mais pour un nombre fini d'entiers successifs, mettons de l'entier  $n_1$  à l'entier  $n_2$ , où  $n_1 < n_2$ . On a alors la version suivante :

**Théorème 1.4.** — Si  $\mathcal{P}(n_1)$  est vraie et si, pour un entier  $n$  **fixé** de  $\llbracket n_1, n_2 - 1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}(n)$  implique  $\mathcal{P}(n+1)$ , alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie quel que soit l'entier  $n$  de  $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ .

### Récurrance d'ordre $p$ (avec $p \geq 2$ )

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux  $p$  rangs précédents (souvent  $p = 2$ ). On a alors :

**Théorème 1.5.** — Pour un entier naturel  $n$ , considérons une proposition  $\mathcal{P}(n)$ . Si les  $p$  premières propositions  $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(p-1)$  sont vraies et si, pour un entier naturel  $n$  **fixé** de  $\mathbb{N}$ , les  $p$  propositions  $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \dots, \mathcal{P}(n+p-1)$  impliquent  $\mathcal{P}(n+p)$ , alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie quel que soit l'entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

⇒ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?**

### Récurrance forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au  $n^{\text{ème}}$  (et non pas seulement au  $n^{\text{ème}}$ ), pour en montrer la vérité au rang  $(n+1)$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.6.** — Pour un entier naturel  $n$ , considérons une proposition  $\mathcal{P}(n)$ . Si  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et si, pour un entier naturel  $n$  **fixé**, en supposant les propositions  $\mathcal{P}(k)$  vraies pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on montre que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie quel que soit l'entier naturel  $n$ .

⇒ **Un exemple de démonstration par récurrence forte sera donné au chapitre 2**

**Remarque 1.7.** — On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier  $n$  donné, on a besoin de la vérité de  $\mathcal{P}(n)$  et de  $\mathcal{P}(n+1)$  pour établir celle de  $\mathcal{P}(n+2)$ . La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire  $\mathcal{P}(1)$  de  $\mathcal{P}(0)$  : il faut  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  pour obtenir  $\mathcal{P}(2)$ , puis enclencher la récurrence.

## ■ ■ Méthodes

### ■ Raisonnements

#### □ Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire alors une contradiction.

⇒ Exercice 1.4

**Exemple.** Montrer que pour tout nombre réel  $x$  différent de  $-3$ , on a :  $\frac{x+1}{x+3} \neq 1$ .

Par l'absurde, si l'on avait  $\frac{x+1}{x+3} = 1$ , alors on en déduirait  $x+1 = x+3$ , ce qui équivaut à  $1 = 3$ .

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que :  $\forall x \neq -3, \frac{x+1}{x+3} \neq 1$ .

#### □ Méthode 1.2. Comment montrer une équivalence par double implication ?

L'équivalence ( $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ ) signifie la double implication : ( $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ) et ( $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ ).

⇒ Exercice 1.3

**Remarque** — On privilégiera cette méthode lorsque les arguments permettant d'établir l'une des deux implications sont différents de ceux permettant d'établir l'autre.

**Exemple.** Soit deux réels  $a$  et  $b$ . Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$ .

Commençons par noter que, si  $a = b = 0$ , alors pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a bien  $a2^n + b3^n = 0$ .

Établissons l'autre implication :

Si, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$a2^n + b3^n = 0, \text{ alors } \begin{cases} a2^0 + b3^0 = 0 \\ a2^1 + b3^1 = 0 \end{cases} \left( \begin{array}{l} \text{si l'égalité est vraie pour tout } n \text{ alors elle} \\ \text{l'est en particulier pour } n = 0 \text{ et } n = 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Ce système s'écrit } \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \text{ et on en déduit } \begin{cases} b = -a \\ 2a - 3a = 0 \end{cases}, \text{ puis : } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Ceci prouve la seconde implication, et finalement l'équivalence.

**Remarque** — Le fait de choisir deux valeurs de  $n$  pour trouver  $a$  et  $b$  n'est pas une hérésie puisque  $a$  et  $b$  sont des constantes (indépendantes de  $n$ ). Si  $a$  et  $b$  étaient des fonctions de  $n$ , tout ceci serait inacceptable.

## ■ Récurrences

### □ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par récurrence sur l'entier naturel $n$ ?

$n_0$  est ici un entier naturel fixé.

On veut montrer que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  à partir de  $n_0$ .

- Initialisation : on vérifie que  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie.
- Hérité : on considère un entier  $n$  fixé supérieur ou égal à  $n_0$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. En utilisant  $\mathcal{P}(n)$ , on montre qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.
- Conclusion :  $\mathcal{P}(n)$  est alors vraie pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

⇒ Exercices 1.5, 1.6, 1.7, 1.9

**Exemple.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à 1.

On commence par noter, pour  $n$  entier naturel,  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n = 1$ ".

- Initialisation :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie par choix de  $u_0$ .
- Hérité : on suppose  $\mathcal{P}(n)$  vraie (c'est-à-dire  $u_n = 1$ ) pour un entier naturel  $n$  fixé.

On a alors  $u_{n+1} = \frac{3 \times 1 - 2}{1} = 3 - 2 = 1$ , ce qui prouve que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$ .

### □ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 sur l'entier naturel $n$ ?

On veut montrer que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  à partir de  $n_0$ .

- Initialisation : on vérifie que  $\mathcal{P}(n_0)$  et  $\mathcal{P}(n_0 + 1)$  sont vraies.
- Hérité : on considère un entier  $n$  fixé, supérieur ou égal à  $n_0$ , tel que  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies. Grâce à  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$ , on montre que  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.
- Conclusion :  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

⇒ Exercice 1.8