Chapitre 1
Intégrales impropres

Introduite parallèlement par Isaac **Newton** et Gottfried **Leibniz** à la fin du XVII^{e} siècle, la notion d'intégrale est utilisée tout au long du siècle suivant, sans souci de justification de son existence ni de précision de la classe des fonctions que l'on peut intégrer. Augustin-Louis **Cauchy** est le premier à le faire mais se restreint aux fonctions continues. L'apport du mathématicien allemand Bernhard **Riemann** est fondamental. Il définit l'intégrale de fonctions plus générales, englobant les fonctions continues, et justifie la conservation des propriétés essentielles à son utilisation. Le mathématicien français Henri **Lebesgue** fait en 1902 un nouveau pas, grâce à une approche partant de mesures d'ensembles. Ceci permettra de nouvelles généralisations vers ce qu'on appelle l'intégrale abstraite, qui englobe de nombreuses théories comme celle des probabilités ou des sommations de séries.

Bernhard Riemann
1826-1866

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Savoir étudier la convergence d'une intégrale impropre.
- ▷ Savoir mettre en œuvre les critères de convergence.
- ▷ Savoir intégrer par parties dans une intégrale impropre.
- ▷ Savoir effectuer un changement de variable dans une intégrale impropre.
- ▷ Connaître et savoir utiliser les intégrales de Riemann.

■ Et plus si affinités

- ▷ Connaître la définition et les propriétés de la fonction gamma.
- ▷ Savoir étudier la convergence d'une intégrale plusieurs fois impropre.

■■ Résumé de cours

■ Généralités

❑ Définitions d'une intégrale impropre

Définition 1.1. — Soit une fonction *f* continue sur $[a,b[$, où $a < b \leq +\infty$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est *impropre* (ou *généralisée*) en *b*.

Exemple 1.1. — L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ est impropre en 1, $\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du$ est impropre en $+\infty$.

Définition 1.2. — Soit une fonction *f* continue sur $]a,b]$, où $-\infty \leq a < b$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est *impropre* (ou *généralisée*) en *a*.

Exemple 1.2. — L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est impropre en 0, $\int_{-\infty}^0 e^u\,du$ est impropre en $-\infty$.

❑ Convergence d'une intégrale impropre

Définition 1.3 — Si *f* est continue sur $[a,b[$, avec b réel ou $b = +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge* si $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque *x* tend vers *b*. On a alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Exemple 1.3. — L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. En effet, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et on a : $\forall x \geq 1,\ \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = \frac{-1}{x} + 1$. On a donc $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = 1$ et ainsi : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$.

Définition 1.4 — Si *f* est continue sur $]a,b]$, avec a réel ou $a = -\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge* si $\int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque *x* tend vers *a*. On a alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt.$$

⇨ **Méthode 1.1. Comment étudier la nature d'une intégrale une fois impropre grâce à la définition et, le cas échéant, donner sa valeur ?**

Exemple 1.4. — L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge. En effet, $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est continue sur $]0,1]$, et on a $\forall x > 0,\ \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$, donc $\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$ et ainsi : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

Définition 1.5. — On dit qu'une intégrale *diverge* si elle n'est pas convergente.
Étudier la *nature* d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou non.

Théorème 1.1. — Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, impropre en *b*, converge, alors $\lim_{x\to b^-} \int_x^b f(t)\,dt = 0$.
On dit que *le reste d'une intégrale impropre convergente tend vers* 0.

❑ Cas d'une intégrale "faussement" impropre

Théorème 1.2. — Si une fonction *f* est continue sur $[a,b[$, et prolongeable par continuité en *b*, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. En notant $\tilde{f}$ ce prolongement, on a :
$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$. On dit parfois que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est "*faussement*" *impropre*.

Remarque 1.1. — Dans ce cas, la borne *b* ne peut être qu'un nombre réel.
Exemple 1.5. — L'intégrale $\int_0^1 t\ln t\,dt$ est "faussement" impropre (car la fonction $t \mapsto t\ln t$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 puisque $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$). L'intégrale $\int_0^1 t\ln t\,dt$ est donc une intégrale convergente.

❑ Cas d'une intégrale deux fois impropre

Définition 1.6. — L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, impropre en *a* et en *b*, est dite convergente lorsque, pour un réel *c* arbitrairement choisi dans $]a,b[$, les deux intégrales, chacune une fois impropre, $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent. On pose alors : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.
Sinon (c'est-à-dire si au moins l'une des deux diverge), l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite divergente.

⇨ **Méthode 1.3. Comment étudier la nature d'une intégrale deux fois impropre ?**

Remarque 1.2. — Le résultat précédent ne dépend pas du réel *c* choisi.
Remarque 1.3. — Il est facile de généraliser au cas d'une intégrale plus de deux fois impropre (ce qui est très rare) avec *f* continue sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points a_i, $i \in [\![1,n]\!]$,

tels que $a \leq a_1 < \cdots < a_n \leq b$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si $\int_a^{a_1} f(t)\,dt$, $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt$ ($1 \leq i \leq n-1$) et $\int_{a_n}^b f(t)\,dt$ convergent et : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{a_1} f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt + \int_{a_n}^b f(t)\,dt$.

■ Propriétés et calculs sur les intégrales impropres

❑ Propriétés

Théorème 1.3. — Linéarité. Si les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors quels que soient les réels λ et μ, l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt$ converge. En outre, l'intégration est linéaire, c'est-à-dire que l'on a : $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$.

Remarque 1.4. — La condition pour écrire « $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$ » est la convergence des deux intégrales de droite, et pas seulement celle de l'intégrale de gauche !

Théorème 1.4. — Relation de Chasles. Soit une fonction *f* continue sur $[a,b[$, et un réel *c* de $[a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Théorème 1.5. — Positivité et croissance de l'intégrale. On suppose que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

• Si *f* est positive sur $]a,b[$ et si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ (**positivité**).

• Si pour tout réel *t* de $]a,b[$, $f(t) \leq g(t)$ et si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$ (**croissance**).

❑ Calcul des intégrales impropres

Théorème 1.6. — Intégration par parties. On ne procède pas à une intégration par parties directement dans une intégrale impropre. On se ramène à une intégrale définie sur un segment et on passe ensuite à la limite.

Théorème 1.7. — Changement de variable. Soit une fonction f continue sur $]a,b[$ et φ une bijection de classe C^1 strictement croissante, de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ (avec a, b, α et β réels ou infinis). Les intégrales $\int_a^b f(u)\,du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ sont de même nature, et en cas de convergence, on a : $\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Remarque 1.5. — Si φ décroît, alors, en cas de convergence : $\int_a^b f(u)\,du = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Remarque 1.6. — Le changement de variable $u = -t$ conduit aux deux résultats utiles suivants :

Théorème 1.8. — Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge avec f paire ou impaire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Si f est paire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, et si f est impaire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

■ Cas des intégrales impropres de fonctions positives

❑ Critères de convergence

Dans ce qui suit, f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b[$, avec $-\infty < a < b \le +\infty$.

Théorème 1.9. — Critère d'équivalence. Si f et g sont de signe constant au voisinage de b et si $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Théorème 1.10. — Critère de comparaison.

- Si, au voisinage de b, $0 \le f(t) \le g(t)$, et si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- Si, au voisinage de b, $0 \le f(t) \le g(t)$, et si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Théorème 1.11. — Critère de négligeabilité. Si f et g sont positives au voisinage de b, si $f(t) \underset{b}{=} o(g(t))$, et si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Remarque 1.7. — On adapte les résultats précédents pour des intégrales impropres en a.

⇨ **Méthode 1.2. Comment utiliser les critères de convergence ?**

❑ Comparaison série-intégrale

Théorème 1.12. — Si une fonction f est continue, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$, où a est un réel, alors la série de terme général $f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

⇨ **Méthode 1.4. Comment étudier la nature d'une série à l'aide d'une intégrale ?**

❑ Convergence absolue

Définition 1.7. — L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est *absolument convergente* si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Théorème 1.13. — Toute intégrale absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse.

Théorème 1.14. — Inégalité triangulaire.
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, et si $a \leq b$, alors : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

■ Intégrales de référence

❑ Intégrales de Riemann

Définition 1.8. — Soit α un réel. Les intégrales $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$, avec $b > 0$ (impropre en 0) et $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, avec $a > 0$ (impropre en $+\infty$) sont appelées *intégrale de Riemann* de paramètre α.

Remarque 1.8. — Les intégrales de Riemann les plus utilisées sont $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (impropre en 0) et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ (impropre en $+\infty$). On a choisi $b = 1$ pour la première et $a = 1$ pour la deuxième.

Théorème 1.15. — Cas d'une intégrale de Riemann impropre en 0.
Pour tout réel b strictement positif, l'intégrale $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Remarque 1.9. — Les intégrales $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ (où a et b sont des réels tels que $a < b$) convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$ (il suffit d'effectuer un changement de variable pour se ramener aux intégrales citées dans la **définition 1.8**).

Théorème 1.16. — Cas d'une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$.
Pour tout réel a strictement positif, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Remarque 1.10. — Pour tout réel a strictement négatif, si α est un entier, l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ (le changement de variable $x = -t$ ramène au **théorème 1.16**). On a pris α entier car x^{α} n'est pas défini pour x négatif et α non entier.

❑ Fonction gamma d'Euler

Théorème 1.17. — L'intégrale $\int_{0}^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx$ converge si, et seulement si, le réel t est strictement positif. On note alors $\Gamma(t)$ sa valeur.
La fonction Γ, ainsi définie sur $]0,+\infty[$, s'appelle la *fonction gamma d'Euler*.

Propriété 1.1. — Quel que soit le réel t strictement positif, $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$.
On montre alors par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$.

❑ Autres intégrales de référence

Nous verrons au **chapitre 15** certaines fonctions, appelées *densités*, qui fournissent des exemples d'intégrales convergentes dont on connaît la valeur.

Par exemple, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$, $\int_{0}^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2}$ ($\lambda > 0$), ...