Sujet 2015

Exercice 1 ....

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4,\ e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2) On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.

b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.

c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = R\,D\,R^{-1}$.

3) a) Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.

b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

4) On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n, de C^n en fonction de C et C^2.

5) Compléter, à l'aide de matrices de type `zeros` et `ones`, les deux espaces laissés libres dans la commande `Scilab` suivante pour qu'elle permette de construire la matrice C.

```
C = [ones(1,5);------,------;ones(1,5)]
```

Exercice 2 ....

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un de ces deux guichets se libère pour se faire servir.
On suppose que :
• Les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X, Y et Z, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1[$.
• La durée du changement de personne à un guichet est négligeable.
1) On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que U et V sont des variables aléatoires.

a) Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2x - x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

b) En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_U de U.

c) Déterminer l'espérance et la variance de U.

2) On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

a) Exprimer T en fonction de certaines des variables précédentes.

b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

3) a) On rappelle que, si `a` et `b` sont deux vecteurs lignes de taille n, les commandes `m = min(a,b)` et `M = max(a,b)` renvoient les vecteurs `m` et `M`, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on ait :

`m(i) = min(a(i), b(i))` et `M(i) = max(a(i), b(i))`

On rappelle également que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles permettent de simuler n fois les variables aléatoires U, V et T, pour n entré par l'utilisateur :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
x = grand(1,n,'unf',0,1)
y = grand(1,n,'unf',0,1)
z = grand(1,n,'unf',0,1)
u = ------ ; disp(u, 'u = ')
v = ------ ; disp(v, 'v = ')
t = ------ ; disp(t, 't = ')
```

b) Que représente l'événement $(T \geq V)$?

c) On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $p = P(T \geq V)$ en simulant un grand nombre de fois le passage des clients A, B et C aux guichets.

Compléter les commandes `p = ------ ; disp(p, 'p = ')` pour que, placées sous les commandes écrites à la question 3a), elles permettent d'obtenir une valeur approchée de p.

d) Lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10\,000$, la réponse donnée par `Scilab` est comprise entre 0.66 et 0.67. Que peut-on conjecturer quant à la valeur exacte de p ?

Exercice 3 ....

1) Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$$

a) Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

b) Pour tout réel a positif et pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k(a) = \int_0^{a} t^k e^{-t}\, dt$$

Établir, grâce à une intégration par parties, que : $I_{k+1}(a) = (k+1) I_k(a) - a^{k+1} e^{-a}$.

c) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier que :

$$I_3 = 6 \text{ et } I_4 = 24$$

2) Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour toute la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

3) a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.

b) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

4) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a, b) de f.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a, b)$ de f en son point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.

5) Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \cdots$$

b) Compléter de même l'égalité : $\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y - 2)^2 + \cdots$

c) En déduire une autre écriture de $f(x,y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Problème ....

Partie 1

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1) a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

b) En déduire que: $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

2) a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

b) En déduire que : $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

c) Utiliser la question 1) pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

On admet sans démonstration que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt$$

Partie 2

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne "pile" avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile".

Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : «le joueur a gagné ».

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1) Reconnaître la loi de N.
2) a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

b) Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages : « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p = input('donner la valeur de p')
N = grand(1,1,'geom',---)//'geom' : loi géométrique
X = grand(1,1,'uin',---)//'uin' : loi uniforme discrète
if ------ then disp('------')
          else disp('------')
end
```

3) a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}\left(X=2k+1\right)$.

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}\left(X=2k+1\right)$.

c) Déterminer $P_{(N=2j)}\left(X=2k+1\right)$ lorsque k appartient à $[\![0,\ j-1]\!]$.

d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}\left(X=2k+1\right)$ lorsque k appartient à $[\![0,\ j]\!]$.

4) a) Justifier que $P\left(X=2k+1\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}P\left(N=n\right)P_{(N=n)}\left(X=2k+1\right)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N}\,,\ P\left(X=2k+1\right)=\frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

b) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}\,,\ P\left(X=2k+1\right)=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{t^{2k}}{1-t}dt$.

5) a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)}dt=0$.

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{n}P(X=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\int_0^q\frac{1}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)}dt-\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)}dt\right)$.

c) En déduire que : $P\left(A\right)=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{1}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)}dt$.

6) a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}=\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2}$$

b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.

c) En déduire que $P\left(A\right)>\frac{1}{2}$.

Conseils 2015

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Pas de tergiversation, il faut utiliser la formule suivante :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3),\ f(e_4),\ f(e_5)\big)$$

Pour la fin de la question, il faut montrer que $e_2+e_3+e_4$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et que la famille $(e_2+e_3+e_4,\ e_1+e_5)$ est une famille libre.

b) Pour la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, le théorème du rang fait parfaitement l'affaire. Ensuite, avec les égalités $f(e_2)=f(e_3)=f(e_4)=f(e_5)$, on doit pouvoir trouver trois vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ formant une famille libre, mais on peut aussi résoudre le système $CX=0$.

2) a) Utiliser la linéarité de f permet d'avoir $f(u)=f(e_2)+f(e_3)+f(e_4)$ et $f(v)=f(e_1)+f(e_5)$: il reste à remplacer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$ et $f(e_5)$ pour conclure.

b) Il faut s'attendre à ce que $u-v$ et $u+3v$ soient des vecteurs propres de f. On en connaît d'autres grâce à la question 1b). Surtout ne pas faire une recherche classique des valeurs propres de C avec $C-\lambda I$ (ça prend trop de temps).

c) C'est une question de cours : il faut utiliser la somme des dimensions des sous-espaces propres.

3) a) C'est du calcul.

b) D'après la question précédente, on a $D^3-2D^2-3D=0$, ce qui prouve que le polynôme X^3-2X^2-3X est annulateur de D. Pourquoi donc est-il annulateur de C ?

4) a) Il faut appliquer la relation donnée en remplaçant X par les racines de P.

b) Il faut appliquer la relation précédemment obtenue en remplaçant X par C.

5) La première et la cinquième lignes de C sont données (les *points-virgules* l'indiquent). La *virgule* présente entre les deux instructions à compléter est une indication sur la façon de procéder : on "colle" horizontalement des matrices.

❖ Conseils de rédaction

Ce n'est pas gravissime, mais il n'est pas très bon de confondre les éléments de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ avec ceux de $\mathbb{R}^5$.

1) a) Ayant une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, il ne faut pas oublier de vérifier la liberté pour avoir une base.

b) Pour passer de $f(e_2)=f(e_3)$ à $f(e_2-e_3)=0$, il est important de citer la linéarité de *f*.

2) a) Il faut absolument citer la linéarité de *f* (surtout dans cette question !).

c) Pour *D* et *P*, on a le choix pourvu que les colonnes de *P* soient les coordonnées des vecteurs de base des sous-espaces propres de *f* associés aux valeurs propres situées sur les colonnes correspondantes de la matrice *D*.

3) a) Détailler les calculs afin d'être crédible au maximum.

4) a) Peu importe la manière mais il n'est pas question de rater la résolution du système obtenu.

❖ Aide à la résolution

1) a) Pour la fin de la question, on peut remarquer que l'on a :

$$e_2+e_3+e_4=(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5)-(e_1+e_5)$$

b) Avec les égalités $f(e_2)=f(e_3)=f(e_4)=f(e_5)$, on a :

$$f(e_2-e_3)=0,\ f(e_2-e_4)=0 \ \text{ et } \ f(e_2-e_5)=0$$

2) b) Ne pas oublier que 0 est valeur propre de *f* associée à un sous-espace propre de dimension 3, en l'occurrence $\mathrm{Ker}(f)$.

3) b) Le polynôme X^3-2X^2-3X est annulateur de *D*, donc aussi annulateur de *f* (mais pourquoi ?) et par conséquent, annulateur de *C* (mais pourquoi ?).

4) b) Il ne faut pas oublier que $C^3-2C^2-3C=0$.

5) Il faut compléter avec $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) Peut-être une faute d'étourderie, mais il n'est pas bien vu du tout, et c'est sanctionné, d'écrire $\mathrm{Im}(f)=(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3),\ f(e_4),\ f(e_5))$ au lieu de $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3),\ f(e_4),\ f(e_5))$.

Trouver que la famille $(e_2+e_3+e_4, e_1+e_5)$ est libre puis conclure que c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$ sans vérifier que les deux vecteurs qui la composent appartiennent à $\operatorname{Im}(f)$ est la porte ouverte à toutes les bêtises : toute famille libre de deux vecteurs serait une base de n'importe quel espace vectoriel de dimension 2.

b) Écrire que le vecteur nul peut être considéré comme une base de $\operatorname{Ker}(f)$ est une totale hérésie.
De même que pour la question précédente, il faut vérifier que les vecteurs que l'on propose pour former une base de $\operatorname{Ker}(f)$ appartiennent bien à $\operatorname{Ker}(f)$.
Écrire $\dim \operatorname{Ker}(f)=3$ et faire suivre avec $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}(e_2-e_3)$ est étonnant !

2) a) Il est étrange de penser que $e_2+e_3+e_4=(3,0,0,0,0)$ alors qu'en fait $e_2+e_3+e_4=(0,1,1,1,0)$.

b) Avoir trouvé que -1, 0 et 3 sont valeurs propres ne prouve pas que ce sont **les** valeurs propres de C.

c) Affirmer que C est symétrique relève du rêve éveillé (il est vrai que ça permettait de conclure vite, mais faussement, sur la diagonalisabilité de C !).

3) a) Trouver le bon résultat avec une matrice D fausse est du plus mauvais effet.

b) Avoir constaté que $D^2-2D-3I=0$ et conclure que X^2-2X-3 est un polynôme annulateur de C est une escroquerie : il faut un argument.

4) a) Dommage de planter le discriminant Δ du trinôme X^2-2X-3…

5) En `Scilab`, la syntaxe `ones(2,3,4)` est incorrecte.

Exercice 2...

❖ Conseils de méthode

1) a) Pour commencer, il faut justifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $(U>x)=(X>x)\cap(Y>x)$. Ceci permet de calculer facilement $P(U>x)$. Ensuite il reste à en déduire $F_U(x)$.

b) Pour montrer que U est à densité, il suffit de vérifier que F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en quelques points (ici 0 et 1).

c) Ce sont deux questions de cours facilitées par le fait que les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x\, f_U(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x\, f_U(x)dx$ sont nulles (comme $\int_{-\infty}^{0} x^2 f_U(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2 f_U(x)dx$).

2) a) Le temps total T passé par C dans l'agence bancaire est la somme du temps d'attente de C et du temps de passage de C au guichet.