Sujet 2013

Exercice 1 ....

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge. Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$ converge également et que, de plus, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$$

1) Étude d'un exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.

a) Vérifier que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout entier naturel non nul, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple.
On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_n = n!$$

a) Écrire une déclaration de fonction Pascal dont l'en-tête est

function fact (*n* : integer) : integer ;

et qui renvoie n ! à l'appel de fact (n).

b) Écrire le corps principal d'un programme Pascal, utilisant ou pas cette fonction, et permettant de calculer et d'afficher la valeur de u_n lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leq \dfrac{1}{(n-1)!}$.

e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$$

On revient au cas général.

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1 + 2 + ... + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + ... + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

4) a) Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation, que : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 2 ....

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme identité de E.

1) Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).
On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que Im f est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.
2) Étude d'un deuxième exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).
On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de f.
b) Montrer que Ker $(f - Id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.
On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

3) On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) Vérifier que l'on a : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

4) a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\operatorname{vect}(u))^{\perp}$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Exercice 3 ....

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f peut être considérée comme une densité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \operatorname{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } Y_n = \frac{S_n}{n}$$

On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléatoires X_k.

3) On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et x.

4) a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \dfrac{1}{n}$.

En déduire que : $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5) a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6) Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Problème ....

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.
On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $P(X = Y)$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

1) a) Calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\, u_{n+2} = (n+1)\, u_n$$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\, u_{n+1}\, u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3) a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c) Montrer enfin que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

1) Établir, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $I(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.

2) a) Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de x, telle que :

$$0 \le \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \le M$$

b) Montrer que : $\forall u \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $1 \le \dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \le 1 + u$.

3) a) En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2} dt$.

b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t\,x}$ pour montrer que :

$$\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

c) Montrer de la même façon que : $\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\, dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\sqrt{x}}$.

4) a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 + t$, que :

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}} du$$

b) Utiliser le résultat de la question 2 b) pour en déduire que : $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi\,x}}$.

Partie 3

1) Exprimer comme somme d'une série la probabilité $P(X = Y)$.

2) a) On désigne par t un réel de $[-1, 1]$ et par x un réel strictement positif.
Montrer que, pour tout u compris entre 0 et $-t\,x$, on a : $e^u \leq e^x$.
Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto e^u$ entre 0 et $-t\,x$.

b) En effectuant le changement de variable $t = \sin u$ dans l'intégrale $u_k = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^k\, du$, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = u_k$.

c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}} \right| \leq \frac{2\,x^{2n+1}\, e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}$$

d) Montrer enfin que : $\forall x > 0,\ I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}}$.

3) Établir que : $P(X = Y) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\,\lambda}}$.

Conseils 2013

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Puisqu'il faut donner la somme de la série, autant considérer la somme partielle $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$, ce qui permettra de prouver la convergence et donnera la somme en prime.

b) Il faut développer $k(k+1)$ et scinder la somme obtenue.

c) Écrire $\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$ afin de créer un "télescopage".

2) a) Utiliser la définition de n ! par récurrence, à savoir :

$$\begin{cases} 0!=1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n!=n\times(n-1)! \end{cases}$$

b) Il faut écrire une boucle qui calcule $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, puis diviser n par S_n.

c) C'est une question de cours sur la série exponentielle.

d) Il faut minorer $\sum_{k=1}^{n} k!$.

e) Le critère de comparaison pour les séries à termes positifs fait bien l'affaire pour établir la convergence de la série de terme général u_n.

3) Il faut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, à deux vecteurs bien choisis.

4) a) Il faut remplacer $1+2+...+n$ par $\frac{n(n+1)}{2}$, puis effectuer quelques transformations qui amènent à : $\frac{1}{a_1+a_2+...+a_n} \leq \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$.

b) Encore une sommation "télescopique" après interversion de sommes.

c) Toute suite croissante et majorée est convergente.

❖ Conseils de rédaction

1) a) Il faut travailler sur les sommes partielles afin d'éviter d'écrire un monstre tel que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

c) Même remarque que ci-dessus.

2) a) Si l'on opte pour une déclaration récursive, il faut écrire fact : = n*fact(n−1) et non pas fact : = n*fact.
Si l'on opte pour une déclaration itérative, il faut alors écrire, dans la boucle "for", aux : = n*aux, puis après la boucle, affecter aux à la variable fact.

d) Quand on simplifie par n, il est bien de signaler que n est différent de 0.

3) Ne pas confondre $\| x \|^2$ et $\| x \|$.

4) a) Lorsque l'on multiplie ou divise par un réel les deux membres d'une inégalité, il faut préciser que ce réel est non nul **et** il faut aussi donner son signe (pour justifier que le sens de l'inégalité est conservé ou qu'il est inversé).

c) Attention ! $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$ ne peut pas être qualifié de majorant (il dépend de N).

❖ Aide à la résolution

1) b) Il faut connaître les sommes $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et ne pas faire d'erreur de calcul.

2) a) Dans la version récursive, initialiser la variable *fact* à 1 puis écrire la relation de récursivité.
Dans la version itérative, initialiser la variable *aux* à 1 puis écrire une boucle "for k : = 1 to n" dans laquelle on calcule les valeurs successives de k ! jusqu'à arriver à n !.

d) Au vu de ce qu'il faut trouver, il paraît bien de minorer $\sum_{k=1}^{n} k!$ par $n!$.

e) Pour la fin de la question, se souvenir que $e \geq 2$ ($e \simeq 2,72$).

3) Les vecteurs "bien choisis" pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont :

$$x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}) \text{ et } y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{2}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{n}{\sqrt{a_n}}\right)$$

4) a) Ayant obtenu $\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$, il reste à multiplier les deux membres par $2n+1$ et à remarquer ensuite que : $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

b) L'interversion des sommes donne : $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}$.

c) Majorer $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$ par $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_k}$ (la série converge) puis en déduire que la **suite** $\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ est croissante et majorée.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) • L'enchaînement suivant est à proscrire impérativement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}=1$$

À droite du premier signe "=", on a écrit deux monstres mathématiques (puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge).

• Moins angoissant mais pas du tout rigoureux : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Il faut des parenthèses autour de $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

b) • À éviter impérativement : $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n}1}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$. La première égalité est correcte, mais la deuxième est une horreur !

• Dans le même style, il est très faux d'écrire $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$: l'inverse d'une somme n'est pas la somme des inverses !

• L'égalité $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ devrait être connue sans aucune faille : il faut absolument éviter d'écrire $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ ou $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

c) Même remarque que celle de la question 1a).

2) a) La boucle qui ne sert vraiment à rien : « For i : = 0 to n do i : = i * 1 ; ».

c) • Des comparaisons inutiles et fausses :

$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n(n-1)}$ (le membre de droite n'a pas de sens pour $n=0$ et pour $n=1$).

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n^2}$ (c'est faux pour $n=2$ et pour $n=3$).