

Table des matières

1	Des séries numériques	1
1	Rappels sur les séries numériques	2
1.1	Série associée à une suite	2
1.2	Lien suite-série	3
1.3	Séries géométriques	4
2	Séries à termes positifs	6
2.1	Convergence et comparaisons asymptotiques	6
2.2	Comparaison série-intégrale	8
2.3	Séries absolument convergentes	10
3	Produit de Cauchy de deux séries	11
3.1	Présentation motivée	11
3.2	Une application à la série exponentielle	13
4	Compléments divers	14
4.1	Règle de D'Alembert	14
4.2	Critère spécial des séries alternées	15
4.3	Formule de Stirling	17
	Bilan	19
	Exercices	21
2	De l'Algèbre linéaire (partie 1)	25
1	Espaces vectoriels	26
1.1	Les axiomes de la structure de \mathbb{K} -espace vectoriel	26
1.2	Espaces vectoriels de référence	27
2	Familles de vecteurs, dimension	27
2.1	Familles libres, familles liées	28
2.2	Familles génératrices	29
2.3	Bases et dimension	29
3	Sous-espaces vectoriels	31
3.1	Définitions et exemples de référence	31
3.2	Dimension d'un sous-espace vectoriel	32
3.3	Produit de \mathbb{K} -espaces vectoriels	33

3.4	Somme de sous-espaces vectoriels	34
4	Applications linéaires	36
4.1	Définition et premières propriétés	36
4.2	Noyau et image d'une application linéaire	37
4.3	Applications linéaires et base	38
4.4	Applications linéaires en dimension finie	39
5	Matrices et applications linéaires. Trace	39
5.1	Matrice d'une application linéaire dans des bases	39
5.2	Changement de base	41
5.3	Trace d'une matrice, d'un endomorphisme en dimension finie	42
	Bilan	44
	Exercices	46
3	Des espaces vectoriels normés	51
1	Normes sur un \mathbb{K} -espace vectoriel	52
1.1	Définition et exemples fondamentaux	52
1.2	Boules ouvertes et boules fermées	54
1.3	Parties convexes d'un espace vectoriel	56
1.4	Parties bornées, suites et fonctions bornées	57
1.5	Normes sur un EVN de dimension finie	59
2	Suites d'un espace normé	61
2.1	Convergence des suites	61
2.2	Cas des espaces normés de dimension finie	63
3	Topologie des espaces normés	64
3.1	Parties ouvertes	64
3.2	Parties fermées	66
3.3	Cas des espaces normés de dimension finie	69
	Bilan	69
	Exercices	71
4	De l'Algèbre linéaire (partie 2)	75
1	Polynômes de matrices, d'endomorphismes	76
1.1	Les ensembles $\mathbb{K}[M]$ et $\mathbb{K}[u]$	76
1.2	Polynômes annulateurs	78
1.3	Sous-espaces stables par un endomorphisme	80
2	Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	81
2.1	L'espace E^* des formes linéaires sur E	81
2.2	Caractérisation des hyperplans vectoriels	82
2.3	Équations d'un hyperplan relativement à une base	84
3	Déterminants	85
3.1	Déterminant d'une matrice carrée	85

3.2	Déterminants particuliers	89
3.3	Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie	91
	Bilan	92
	Exercices	93
5	Des limites et de la continuité dans les EVN	99
1	Limite et continuité en un point	100
1.1	Limite en un point	100
1.2	Caractérisation séquentielle des limites	100
1.3	Opérations sur les limites	101
1.4	Continuité en un point	102
2	Continuité sur une partie	103
2.1	L'espace $\mathcal{C}(D, F)$	103
2.2	Ouverts et fermés définis par une fonction continue	103
2.3	Le théorème des bornes atteintes	105
2.4	Fonctions lipschitziennes	106
3	Continuité des applications algébriques	108
3.1	Applications linéaires	108
3.2	Applications multilinéaires	110
3.3	Applications polynomiales	112
	Bilan	113
	Exercices	114
6	Des suites et des séries de fonctions	119
1	Différentes façons de converger	120
1.1	Convergence simple	120
1.2	Convergence uniforme	121
1.3	Cas particulier des séries de fonctions	124
1.4	Convergence uniforme sur tout segment	125
1.5	Convergence normale d'une série de fonctions	126
2	Régularité de la limite d'une suite de fonctions	127
2.1	Propriétés préservées par la convergence simple	127
2.2	Continuité et convergence uniforme	128
2.3	Interversion limite-limite	129
2.4	Interversion limite-intégrale	129
2.5	Interversion limite-dérivée	131
3	Régularité d'une somme d'une série de fonctions	132
3.1	Continuité de la fonction-somme et double limite	132
3.2	Intégration terme à terme d'une série de fonctions	133
3.3	Dérivation terme à terme d'une série de fonctions	133
3.4	La fonction ζ de Riemann	133
	Bilan	137

Exercices	139
7 De la réduction (partie 1)	145
1 Éléments propres	146
1.1 La motivation	146
1.2 Éléments propres d'un endomorphisme	146
1.3 Propriétés des sous-espaces propres	148
1.4 Un exemple géométrique : les symétries et les projections	149
1.5 Adaptation aux matrices carrées	152
2 Polynôme caractéristique	152
2.1 Définition et exemples	153
2.2 Propriétés du polynôme caractéristique	154
2.3 Le théorème de Cayley-Hamilton	157
2.4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit . .	158
2.5 Le cas des matrices nilpotentes	158
3 Diagonalisation	159
3.1 Définition et premiers exemples	159
3.2 Diagonalisabilité et dimension des sous-espaces propres .	161
3.3 Application aux relations de récurrence linéaire d'ordre k	163
3.4 Application aux équations différentielles linéaires à coef- ficients constants	167
Bilan	168
Exercices	171
8 Des intégrales généralisées	175
1 Fonctions continues par morceaux	176
1.1 L'ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$	176
1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	178
1.3 Théorème fondamental et conséquences	181
2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque	185
2.1 Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$	185
2.2 Cas d'un intervalle quelconque	187
2.3 Règles de comparaison et intégrales convergentes	191
2.4 Intégration par parties et changement de variable	193
3 Fonctions intégrables	195
3.1 Intégrales absolument convergentes	196
3.2 Règles de comparaisons et fonctions intégrables	197
3.3 Les espaces de Lebesgue \mathcal{L}^1 et \mathcal{L}^2	199
Bilan	202
Exercices	204

9	Des espaces probabilisés dénombrables	209
1	Ensembles dénombrables	210
1.1	Définitions et premiers exemples	210
1.2	Propriétés des ensembles dénombrables	213
2	Espaces probabilisables, espaces probabilisés	216
2.1	Tribu sur un ensemble	216
2.2	Probabilités sur un espace probabilisable	218
2.3	Propriétés des probabilités	219
2.4	Événements limites	222
2.5	Loi de probabilité, cas dénombrable	224
3	Conditionnement et indépendance	225
3.1	Probabilité conditionnelle	225
3.2	Événements indépendants	226
3.3	Système complet dénombrable d'événements	228
	Bilan	230
	Exercices	231
10	De la réduction (partie 2)	237
1	Diagonalisation et polynômes annulateurs	238
1.1	Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres	238
1.2	Une version faible du lemme des noyaux	239
1.3	Caractérisation des matrices diagonalisables	240
1.4	Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit	241
2	Trigonalisation	241
2.1	Définition et premiers exemples	241
2.2	Caractérisation des matrices trigonalisables	243
2.3	Pratique de la trigonalisation	244
2.4	Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton	248
	Bilan	251
	Exercices	252
11	Des séries entières	255
1	Rayon de convergence	256
1.1	Et tout commença par le lemme d'Abel	256
1.2	Détermination du rayon de convergence	259
1.3	Somme et produit de Cauchy de deux séries entières	262
2	Régularité de la somme d'une série entière	263
2.1	Continuité	263
2.2	Série entière dérivée et caractère \mathcal{C}^∞	265
3	Développement en série entière en 0	267
3.1	Fonctions développables en série entière en 0	267
3.2	Développements en série entière usuels	270

3.3	Utilisation d'une équation différentielle linéaire	272
3.4	L'idée géniale d'Euler pour calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$	274
	Bilan	276
	Exercices	277
12	Des intégrales à paramètre	285
1	Suites et séries de fonctions intégrables	286
1.1	Motivation	286
1.2	Le théorème de convergence dominée de Lebesgue	287
1.3	Intégration terme à terme	288
2	Intégrales à paramètre	289
2.1	Théorème de continuité	290
2.2	Théorème de dérivation	291
2.3	Application : la fonction Gamma d'Euler	292
	Bilan	294
	Exercices	295
13	Des variables aléatoires discrètes	301
1	Notion de variable aléatoire discrète	302
1.1	Généralités	302
1.2	Indépendance	306
1.3	Loi conjointe, lois marginales et conditionnement	308
2	Espérance et variance	310
2.1	L'opérateur d'espérance	310
2.2	Variance d'une variable aléatoire réelle discrète	314
2.3	Covariance de deux variables aléatoires réelles discrètes	317
3	Variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}	321
3.1	Fonction génératrice	321
3.2	La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	324
3.3	La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	328
4	Loi faible des grands nombres	331
	Bilan	333
	Exercices	334
14	Des arcs paramétrés	339
1	Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n	340
1.1	Dérivation des fonctions vectorielles	340
1.2	Dérivées de composées	342
1.3	Fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k	345
1.4	Extension aux fonctions de \mathbb{R} dans un EVN	346
2	Étude des arcs paramétrés du plan	347

2.1	Recherche des points multiples	348
2.2	Tangente en un point régulier	350
2.3	Étude locale en un point singulier	353
2.4	Réduction de l'intervalle d'étude	355
2.5	Étude des branches infinies	360
2.6	Longueur d'un arc paramétré	362
3	Bestiaire d'arcs paramétrés	364
	Bilan	366
	Exercices	367
15	Du calcul différentiel sur \mathbb{R}^n	371
1	Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	372
1.1	Représentation graphique si $n = 2$	372
1.2	Fonctions partielles en un point	373
1.3	Dérivées partielles et classe \mathcal{C}^1	375
1.4	Différentielle en un point	378
1.5	Dérivée d'une composée, règle de la chaîne	380
1.6	Le cas des coordonnées polaires	383
2	Applications géométriques	384
2.1	Gradient en un point d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	384
2.2	Courbes définies par une équation $f(x, y) = 0$	386
2.3	Surfaces définies par une équation $f(x, y, z) = 0$	389
3	Dérivées d'ordre supérieur	393
3.1	Dérivées partielles secondes et classe \mathcal{C}^2	393
3.2	Le théorème de Schwarz	393
3.3	Exemples d'équations aux dérivées partielles	394
4	Extrémums d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	396
4.1	Extremum local, global	396
4.2	Condition du premier ordre	397
	Bilan	398
	Exercices	399
16	Des espaces préhilbertiens réels	407
1	Produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel	408
1.1	Motivation : produit scalaire de la Géométrie classique	408
1.2	Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens	409
1.3	Expression matricielle d'un produit scalaire	411
1.4	Norme associée à un produit scalaire	413
2	Orthogonalité	416
2.1	Familles orthogonales	416
2.2	Sous-espace orthogonal d'une partie	420
2.3	Projections orthogonales	423

3	Formes linéaires sur un espace euclidien	427
3.1	Représentation d'une forme par un vecteur	427
3.2	Vecteur normal à un hyperplan	428
	Bilan	429
	Exercices	431
17	Des endomorphismes remarquables	437
1	Isométries d'un espace euclidiens	438
1.1	L'ensemble $O(E)$ des isométries vectorielles	438
1.2	Matrices orthogonales	440
1.3	Orientation d'un \mathbb{R} -espace vectoriel	443
2	Cas des dimensions 2 et 3	446
2.1	Produit mixte, produit vectoriel	446
2.2	Description de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})$	451
2.3	Description de $SO_3(\mathbb{R})$ et de $O_3(\mathbb{R})$	453
3	Endomorphismes symétriques	456
3.1	Définition et lien avec les matrices symétriques	456
3.2	Retour aux symétries et projections orthogonales	458
3.3	Le théorème spectral	460
	Bilan	463
	Exercices	464
18	Des systèmes différentiels linéaires	469
1	Systèmes différentiels linéaires	470
1.1	Généralités	470
1.2	Le théorème de Cauchy linéaire	471
1.3	Résolution quand A est diagonalisable	474
2	Équations différentielles linéaires scalaires	477
2.1	Transcription par un système différentiel	477
2.2	Cas des EDL2	478
	Bilan	481
	Exercices	481
A	Des séries de Fourier	485
1	La motivation historique	486
1.1	L'équation de la chaleur	486
1.2	Résolution en dimension 1	486
1.3	Une idée géniale	488
2	Espaces préhilbertiens complexes	489
2.1	Produit scalaire hermitien	489
2.2	Orthogonalité	491
2.3	Isométries et matrices unitaires	492

3	Analyse de Fourier	493
3.1	L'espace $\mathcal{P}_N(T)$ des polynômes trigonométriques	493
3.2	Coefficients de Fourier et projection orthogonale	495
3.3	Le cas réel : les coefficients a_n et b_n	499
3.4	Application musicale	500
4	Synthèse de Fourier	502
4.1	Les théorèmes de Dirichlet	503
4.2	Le phénomène de Gibbs	505
4.3	Conservation de l'énergie : le théorème de Parseval	505
B	Alphabet grec	507
C	Formulaire de Trigonométrie circulaire	509
D	Formulaire de Trigonométrie hyperbolique	511
E	Formulaire de primitives	513
F	Correction des exercices	515
	Exercices du chapitre 1	515
	Exercices du chapitre 2	525
	Exercices du chapitre 3	532
	Exercices du chapitre 4	541
	Exercices du chapitre 5	548
	Exercices du chapitre 6	555
	Exercices du chapitre 7	566
	Exercices du chapitre 8	574
	Exercices du chapitre 9	583
	Exercices du chapitre 10	590
	Exercices du chapitre 11	596
	Exercices du chapitre 12	610
	Exercices du chapitre 13	618
	Exercices du chapitre 14	626
	Exercices du chapitre 15	634
	Exercices du chapitre 16	645
	Exercices du chapitre 17	654
	Exercices du chapitre 18	661
G	Bibliographie et sitographie commentées	667
	Références des illustrations	669
	Index	671