Chapitre 1

Des séries numériques

Sommer des quantités en nombre infini est une activité mathématique très ancienne et réserve de belles surprises qui ont alimenté beaucoup de controverses. Le lecteur sait sûrement que la somme infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

vaut exactement 2 (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$), ce qui surprend le débutant qui pense que le résultat doit être $+\infty$ puisque l'on ne s'arrête jamais. Quel n'est pas son étonnement quand on lui apprend que la somme infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

vaut quant à elle $+\infty$: on peut faire déborder un fût de 200 L en y versant 1 L, puis 1/2 L, puis 1/3 L, sans jamais s'arrêter[1].

Plus étrange encore : la somme infinie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

écrite ainsi vaut $\ln(2)$, *mais si l'on s'amuse à changer l'ordre de ses termes, on peut obtenir un autre résultat. Lequel ? Celui que l'on veut ! (cf. exercice 1.7).*

En plus de quelques rappels de 1^re^ année, nous allons apporter des compléments à la théorie des séries numériques : le critère de D'Alembert, le produit de Cauchy, les séries alternées et la formule de Stirling.

1. La matière n'étant pas divisible à l'infini, nous déconseillons au lecteur de faire cette expérience, d'autant plus que la divergence vers $+\infty$ de cette série est extrêmement lente.

1 Rappels sur les séries numériques

1.1 Série associée à une suite

La lettre $\mathbb{K}$ désigne, comme d'habitude, l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$. Une suite numérique est par définition une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si $N \in \mathbb{N}$, on appelle *somme partielle d'indice* N le nombre

$$U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_N.$$

La suite des sommes partielles $(U_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est appelée *série (numérique) de terme général* u_n, on la note souvent $\sum u_n$, où parfois $\sum(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il on veut être précis.

On peut rencontrer des séries de la forme $\sum(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: le lecteur sait bien cela. Dans ce cours, nous ne considèrerons que des séries indexées par $\mathbb{N}$ pour simplifier l'exposé.

Définition 2
Si la suite des sommes partielles $(U_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ℓ est appelée *la somme* de la série $\sum u_n$ et se note

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \ .$$

Dans ce cas, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \ell - U_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n$. C'est *le reste* d'indice n de $\sum u_n$.

PIÈGE !
Le reste d'indice n est une somme qui commence à $n+1$.

On notera que par essence, R_n tend vers 0 quand n tend vers ∞.

Théorème 1 *(condition nécessaire de convergence)*
Si une série $\sum u_n$ converge alors nécessairement son terme général u_n tend vers 0.

Preuve. Il suffit de remarquer que $u_n = U_n - U_{n-1}$ pour $n > 0$ et de passer à la limite. □

Vocabulaire. Une série $\sum u_n$ dont le terme général ne tend pas vers 0 est appelée *série grossièrement divergente.*

PIÈGE !

La réciproque du théorème est **fausse**. L'exemple le plus célèbre est donné par la *série harmonique* définie par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

En effet, $H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$: chacun de ces n termes sont supérieurs à $\frac{1}{n+n}$ donc

$$H_{2n} - H_n \geqslant n \times \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Si la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait vers $L \in \mathbb{R}$ on aurait, par passage à la limite, $L - L \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc. Pourtant son terme général, $\frac{1}{n}$, tend vers 0.

Théorème 2 *(linéarité de la somme)*
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors pour tous scalaires α, β, la série $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ + \ \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

PIÈGE !

On peut avoir $\sum(u_n + v_n)$ convergente sans pour autant avoir $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergente : prendre par exemple $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -u_n$. On ne séparera donc pas des sommes infinies en deux sans prendre des précautions de convergence.

1.2 Lien suite-série

Les séries sont des suites particulières. Le résultat simple suivant dit que réciproquement toute suite peut-être vue comme une série. Pour comprendre ce fait, rappelons le principe d'une somme télescopique : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(u_n - u_{n-1}) &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_N - u_{N-1}) \\ &= -u_0 + u_N.\end{aligned}$$

Théorème *(lien suite-série)*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique quelconque, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$$

avec $v_0 = 0$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge, et dans ce cas, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) - u_0$.

Preuve. Il s'agit d'un simple télescopage. □

Utilité. On pourra appliquer à toute suite les méthodes sur les séries numériques : nous verrons dans ce chapitre qu'elles sont nombreuses et performantes. Cf. § sur la formule de Stirling ou l'exercice 1.9.

1.3 Séries géométriques

Théorème 1 *(convergence des suites géométriques)*
Soit $q \in \mathbb{C}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement $q = 1$ ou $|q| < 1$.
De plus, quand $|q| < 1$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

En particulier, si $q \in \mathbb{R}$, la suite (q^n) converge si et seulement si $q \in \,]-1, 1]$ et sa limite est nulle si et seulement si $-1 < q < 1$.

Preuve. Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1, donc converge (vers 1). Si $|q| < 1$, alors $|q^n| = |q|^n$ et comme $|q| \in \,]-1, 1[$, le cours de Sup (ou de lycée)[2] nous dit que $|q^n| \to 0$, et donc $q^n \to 0$.

Réciproquement, supposons que (q^n) converge, et que $q \neq 1$. Si on avait $|q| > 1$, on aurait $|q^n| = |q|^n \to +\infty$, ce qui contredit la convergence de (q^n). On a donc nécessairement $|q| \leqslant 1$. Imaginons un instant que l'on ait $|q| = 1$. On pourrait écrire $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un certain

2. On peut par exemple utiliser la formule du binôme qui garantit que pour tout $\varepsilon > 0$, $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \ldots \geqslant 1 + n\varepsilon$, donc par comparaison, $(1+\varepsilon)^n \to +\infty$. Si $0 < |q| < 1$, on applique cela à $\varepsilon = \frac{1}{|q|} - 1$, ce qui montre que $\frac{1}{|q|^n} \to +\infty$, c'est-à-dire $q^n \to 0$.

$\theta \in \mathbb{R}$. Notons ℓ la limite de (q^n) : c'est aussi la limite de $(q^{n+1}) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} q^n)$ et par unicité de la limite on aurait $\ell = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ell$. Comme $\ell \neq 0$ (car $|q^n| = 1$ pour tout n, donc $|\ell| = 1$ aussi par passage à la limite et continuité du module), il vient $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$, ce qui contredit notre hypothèse ($q \neq 1$). Finalement, on a bien $|q| < 1$. □

Théorème 2 *(convergence des séries géométriques)*

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}$.

En particulier, la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve. Si l'on pose $S_N = 1 + q + q^2 + \ldots + q^N$, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad S_{N+1} = 1 + q(1 + q + \ldots + q^N) = 1 + qS_N$$

et comme $S_{N+1} = S_N + q^{N+1}$ on a $S_N(1-q) = 1 - q^{N+1}$ d'où la formule voulue après division par $1 - q \neq 0$. Si $q = 1$, notons que $S_N = 1 + \ldots + 1$ ($N+1$ fois), donc $S_N = N + 1 \to +\infty$. Ainsi, (S_N) converge si et seulement si (q^n) converge et $q \neq 1$, c'est-à-dire si et seulement si $|q| < 1$ d'après le théorème 1. Puisque (q^n) tend alors vers 0, on a la somme voulue. □

PIÈGE !

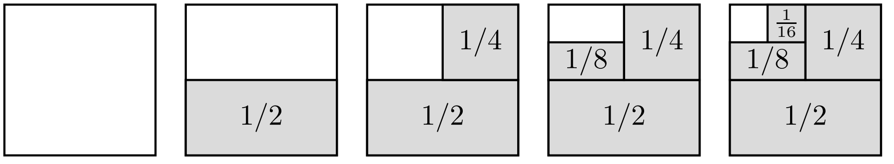
Si la somme commence à n_0, on a les relations suivantes, obtenues en factorisant le premier terme q^{n_0} :

$$\sum_{n=n_0}^{N} q^n = q_0^n \frac{1 - q^{N-n_0+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q},$$

valables quand $|q| < 1$ (et même quand $q \neq 1$ pour la première).

Exemple. La figure suivante illustre de façon amusante l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Sauriez-vous expliquer pourquoi ?



2 Séries à termes positifs

2.1 Convergence et comparaisons asymptotiques

Théorème *(CNS de convergence)*
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si ses sommes partielles U_n sont majorées.

En effet, la suite (U_n) est croissante puisque (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Le théorème de la limite monotone assure qu'une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.

Corollaire 1 *(de comparaison avec inégalité)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n à partir d'un certain rang n_0

1. Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ aussi.
2. Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$.

Rappel.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

- On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n), et on note $u_n = O(v_n)$, quand il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leqslant M|v_n|$ pour tout n à partir d'un certain rang. Si v_n ne s'annule pas (cas fréquent), cela revient à dire que la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.
- On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$, quand $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang, avec $\varepsilon_n \to 0$. Si v_n ne s'annule pas (cas fréquent), cela revient à dire que la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0.

Corollaire 2 *(de comparaison avec domination ou prépondérance)*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs** telles que $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$. Alors,

$$\sum v_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Preuve. Puisque tout le monde est positif, écrire $u_n = O(v_n)$ revient à dire que $u_n \leqslant M v_n$ à partir d'un certain rang (avec $M > 0$). Le corollaire 1 permet de conclure. Enfin, la relation $u_n = o(v_n)$ entraîne la relation $u_n = O(v_n)$, on a donc la même conclusion. $\square$

Rappel.
Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* quand $u_n = \alpha_n \cdot v_n$ à partir d'un certain rang, avec $\alpha_n \to 1$. On note $u_n \sim v_n$. Si v_n ne s'annule pas, cela revient à dire que la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 1.

Corollaire 3 *(de comparaison avec équivalence)*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs** telles que $u_n \sim v_n$. Alors,

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \sum v_n \text{ converge}$$

Preuve. La relation $\sim$ étant symétrique, il suffit de montrer une seule implication. Si $u_n \sim v_n$, alors en particulier $u_n = O(v_n)$ (car une suite qui tend vers 1 est nécessairement bornée). Le corollaire 2 permet de conclure. □

Remarque. Ce théorème s'adapte sans problème pour les séries à termes de signe constant à partir d'un certain rang : il suffit de considérer $-u_n$ et $-v_n$ pour s'en convaincre.

PIÈGE !
La conclusion du théorème dit que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergente ou divergente en même temps). Si ces séries convergent, il **ne dit pas** que leur somme sont égale !

Exemple (à retenir). De façon évidente, $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n(n+1)}$. Mais pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$ et par suite $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Au passage, le lecteur remarquera que si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_{n_0} < v_{n_0}$ pour (au moins) un n_0, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

En fait, il est bien connu que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (mais c'est difficile à montrer, cf. par exemple *Les Mathématiques dévoilées*, tome MPSI page 288), alors qu'un simple télescopage permet de calculer

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{N+1},$$

ce qui montre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

PIÈGE !
Ce théorème est **faux** pour des séries à termes de signe non constant à partir d'un certain rang (typiquement des séries alternées, cf. § 4.2).

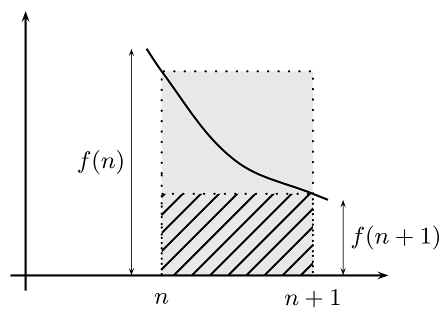
2.2 Comparaison série-intégrale

Le théorème suivant a été vu en première année. Voir au besoin *Les Mathématiques dévoilées* du même auteur (tome MPSI ou PCSI-PTSI).

Théorème *(comparaison série-intégrale)*
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue (par morceaux) positive et décroissante. Alors,

$$\text{la série } \sum (f(n))_{n \geqslant n_0} \text{ CV} \iff \text{ la suite } \left(\int_{n_0}^{n} f(x) \mathrm{d}x \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV.}$$

Preuve. (abrégée) Pour tout $n \geqslant n_0$, on se place sur $[n, n+1]$ et on encadre l'aire sous la courbe de f entre celles de deux rectangles (cf. figure ci-dessous).



On somme sur n, et on utilise la relation de Chasles, ce qui permet d'encadrer les sommes partielles de $\sum f(n)$ par des intégrales (cf. remarques après). On conclut en utilisant le fait que la STP $\sum f(n)$ converge ssi ses sommes partielles sont majorées. □

Remarque. La comparaison série-intégrale est en réalité un peu plus précise que ce critère de convergence. En effet, l'encadrement $f(n+1) \leqslant f \leqslant f(n)$ de f sur $[n, n+1]$ amène, après intégration et sommation, à

$$\forall N \geqslant n_0, \quad -f(n_0) + \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(x) \mathrm{d}x \leqslant -f(N) + \sum_{n=n_0}^{N} f(n),$$

ou si l'on préfère (en recentrant les sommes partielles) à

$$\forall N \geqslant n_0, \quad \boxed{f(N) + \int_{n_0}^{N} f(x) \mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(x) \mathrm{d}x}.$$