Chapitre 1

Bases de la géométrie projective

1.1 Introduction

La géométrie projective est une partie très ancienne des mathématiques dont on trouve trace dans les travaux d'Apollonius de Perges (-190) (sections coniques), de Pappus (fin du III$^{\text{e}}$ siècle) puis plus tard à la Renaissance avec la notion de perspective développée par Filippo Brunelleschi (1377–1446), Leon Battista Alberti (1404–1472), Pietro della Francesca (1410–1492), Albrecht Dürer (1471–1528), Leonardo da Vinci (1452–1519) et surtout à partir de 1600 avec Girard Desargues (1591–1661), Blaise Pascal (1623–1662), Philippe de La Hire (1640–1718), Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Moritz Pasch (1843–1930) et Giuseppe Peano (1858–1932).

Avec les travaux de Pierre de Fermat (160 ?–1665) et de René Descartes (1596–1650) qui introduisent la géométrie des coordonnées, deux conceptions de la géométrie vont s'affronter. D'une part la conception ancienne de la géométrie avec ses points, droites, plans, etc. et leurs propriétés d'incidence, conception qu'on pourrait encore qualifier d'axiomatique et la conception analytique basée sur les coordonnées et l'algèbre. Plus tard avec Felix Klein (1849–1925) et son programme d'Erlangen (1872), une nouvelle vision de la géométrie à partir des groupes de transformations, leurs actions sur des structures géométriques et leurs invariants a vu le jour. Cette nouvelle approche a réalisé une unification de la géométrie en offrant une classification qui incorpore à la géométrie projective la géométrie affine, la géométrie euclidienne, les géométries non-euclidiennes, en mettant au centre la notion de groupe de transformations et d'invariants par un tel groupe. D'ailleurs, cette vision à base d'invariant de groupe va bien au-delà de la géométrie, et elle permet maintenant une classification commode des objets, des problèmes et des outils dans divers secteurs des mathématiques.

Nous renvoyons au livre de M. Kline ([6], ch. 4, ch. 5, ch. 14) pour un historique détaillé des débuts de la géométrie projective. Nous conseillons aussi au lecteur de consulter le texte édifiant du mathématicien Michel Chasles (1793–1880) intitulé « Rapport sur les progrès de la géométrie en France » datant de 1870 qu'on peut trouver par exemple sur le site Gallica de la Bibliothèque Nationale de France. Le texte de Felix Klein sur le programme d'Erlangen « Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen » dont on peut trouver une traduction anglaise de M. W. Askell « A comparative review of recent researches in geometry » est aussi très instructif.

Cette partie des mathématiques s'est développée avec, en particulier, les problèmes posés par l'astronomie, la perspective en dessin, l'optique. Actuellement les espaces projectifs offrent le cadre naturel de travail pour divers domaines en plein essor comme, par exemple, la géométrie algébrique. De plus des applications récentes en font un usage important. Le domaine du graphisme sur ordinateur en est une illustration parmi d'autres. Les codes correcteurs d'erreurs, la cryptographie, utilisent aussi largement la géométrie projective sur des corps finis. L'aspect fini, est d'ailleurs un volet important qui rajoute une dimension combinatoire aux problèmes géométriques. Ainsi des études spécifiques aux géométries finies et à leurs structures d'incidences ont été développées récemment.

Ce cours essaie de présenter les objets et les méthodes de la géométrie projective, en éclairant des résultats souvent anciens grâce à des outils mathématiques plus récents comme l'algèbre linéaire, les formes quadratiques, les groupes.

Ont été utilisés comme documentation les excellents livres de M. Berger ([1] et [2]) et de P. Samuel ([10]). Le lecteur pourra se référer à ces livres pour une étude plus approfondie que celle présentée ici.

Le livre de D. Perrin [9] donne une vision globale de la géométrie très intéressante. Le livre de N. Éfimov [5] fournit aussi un intéressant point de vue concernant les liens entre géométrie projective et géométries non euclidiennes. On trouvera dans [4] un exposé ancien. Enfin les articles [3] et [7] donnent une présentation intéressante, adaptée aux problèmes de l'imagerie informatique.

1.2 Espaces projectifs

Nous allons fixer un corps de base K qui, si on pense à la « géométrie classique ancienne », pourra être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais qui plus généralement peut être un corps commutatif quelconque et en particulier un corps fini. Dans toute la suite, conformément à l'usage international, nous supposerons qu'un corps a toujours la propriété de commutativité pour la multiplication. Nous parlerons de corps gauche quand cette propriété de commutativité n'est pas requise.

Il faut faire attention, dans le cas d'un corps de caractéristique non nulle p, aux mauvaises situations où on serait amené à diviser par p (c'est-à-dire 0 en caractéristique p), ce qui arrive souvent en caractéristique 2. Donc il y aura une première distinction à faire entre les corps de caractéristique nulle et les autres, en particulier les corps de caractéristique 2. Par ailleurs, les intersections d'objets géométriques s'écrivant, grâce à un système de coordonnées, comme solutions de certains systèmes d'équations algébriques, il y aura une nette différence de comportement suivant que le corps est algébriquement clos ou pas.

On supposera donc par la suite, sauf quand cela sera spécifié, que $K = \mathbb{R}$ ou que $K = \mathbb{C}$, tout en sachant que la plupart du temps on peut généraliser à d'autres corps pourvu qu'on tienne compte des clivages principaux entre les différents types de corps de base. Ces clivages se situent comme on l'a vu au niveau de la caractéristique du corps et aussi entre les corps qui sont algébriquement clos et ceux qui ne le sont pas. La théorie peut aussi se développer avec un corps gauche au prix de la perte de certaines propriétés, notamment du théorème de Pappus (cf. Chapitre 5).

Nous verrons par la suite qu'on a intérêt en général lorsqu'on travaille avec un corps de base K qui n'est pas algébriquement clos, à remplacer ce corps de base par sa clôture algébrique, quitte à interpréter à la fin les résultats obtenus dans le cadre du corps initial. C'est ce que nous ferons par la suite en effectuant des allers-retours entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ en fonction des besoins.

1.2.1 Construction vectorielle

Soit E_{n+1} un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur le corps K (où K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On définit sur $E_{n+1} \setminus \{0\}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$.

Cette relation est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que pour tout x, tout y et tout z on a

$$x\mathcal{R}x,$$

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

$$(x\mathcal{R}y \; et \; y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

Les classes d'équivalence sont donc les droites vectorielles épointées, c'est-à-dire les droites vectorielles privées de 0, où encore les directions (non orientées) de droites de E_{n+1}.

Définition 1.2.1. L'ensemble des classes d'équivalence est appelé espace projectif de dimension n construit à partir de E_{n+1}, et sera noté $\mathbb{P}(E_{n+1})$.

Remarque 1.2.2. Comme E_{n+1} est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à K^{n+1} on pourra considérer dans de nombreux cas qu'on travaille en fait sur ce dernier espace, auquel cas l'espace projectif correspondant est noté $\mathbb{P}_n(K)$.

Remarque 1.2.3. Dans de nombreux problèmes, en particulier les problèmes d'intersection, on a intérêt à supposer que $K = \mathbb{C}$. Si le problème traité doit envisager que $K = \mathbb{R}$, alors on peut commencer par regarder ce qu'il se passe pour $K = \mathbb{C}$ afin de bien comprendre la situation, puis étudier les conclusions que l'on peut en tirer lorsque le corps de base est restreint au corps originel.

Remarque 1.2.4. Si $n = 0$ alors $\mathbb{P}(E_{n+1})$ ne contient qu'un point.

1.2.2 Carte affine

Supposons $n \geq 1$. Soit H un hyperplan affine de E_{n+1} qui ne passe pas par l'origine (cf. figure 1.1), alors on obtient une représentation partielle de l'espace projectif en prenant les intersections des droites vectorielles de l'espace E_{n+1} avec l'hyperplan affine H. Ceci donne une carte de $\mathbb{P}(E_{n+1})$, à ceci près que les points de l'espace projectif correspondant aux directions parallèles à H ne sont pas représentés sur cette carte.

Ainsi l'espace projectif $\mathbb{P}(E_{n+1})$ apparaît maintenant comme l'espace affine H (qui est bien de dimension n) auquel se rajoutent les points correspondant aux directions parallèles à H, appelés points à l'infini de H.

Définition 1.2.5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ≥ 1. Notons π la surjection canonique de $E \setminus \{0\}$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$. Une carte affine de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est l'image par π d'un hyperplan affine H de E qui ne passe pas par l'origine.

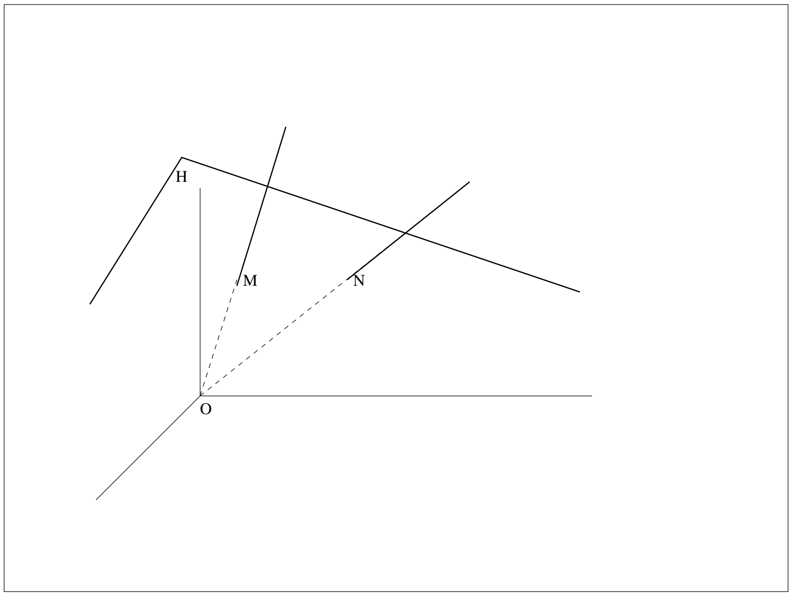

FIGURE 1.1 – Espace affine, espace projectif

Remarque 1.2.6. L'application π restreinte à H est bijective sur son image $\pi(H)$. Ceci nous permet, quand aucune confusion n'en résulte, d'identifier $\pi(H)$ à H et de continuer à appeler H la carte affine $\pi(H)$, ce qui revient à représenter chaque point de $\pi(H)$ par son unique représentant dans H.

Cette vision de l'espace projectif comme espace affine auquel on rajoute les points à l'infini nous permet tout naturellement, lorsque réciproquement on part d'un espace affine H de dimension n sur un corps K, de définir sa complétion projective. Soit F l'espace vectoriel de dimension n sur K sous-jacent à l'espace affine H, qui peut être obtenu à partir de H en y fixant un point origine O. L'espace vectoriel F est constitué des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ où $M \in H$. Soit $E = F \times K$ et $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif associé à E. On peut alors définir l'injection j_O de H dans $\mathbb{P}(E)$ en posant :

$$j_O(M) = \pi\left(\overrightarrow{OM}, 1\right),$$

où π est la surjection canonique de $E \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}(E)$ qui à un vecteur non nul associe sa classe. Ainsi H se plonge dans l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, qu'on appellera complétion projective de H.

Les points à l'infini relatifs à H sont alors les points de la forme

$$\pi\left(\overrightarrow{OM}, 0\right).$$

Nous allons voir, dans le paragraphe suivant, quelle structure on peut donner à l'ensemble des points à l'infini.

Remarque 1.2.7. La notion de point à l'infini est affine. Dans l'espace projectif lui-même tous les points ont le même statut, et il n'existe pas de points spéciaux. Il n'y a de notion de point à l'infini que par rapport à une carte. Ces points se dessinent alors à distance finie sur une autre carte.

1.2.3 Sous-espaces projectifs

Soit π l'application de $E_{n+1} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{P}(E_{n+1})$ qui à un vecteur non nul fait correspondre sa classe. Si F est un sous-espace de E_{n+1} de dimension k où $1 \leq k \leq n+1$ alors on vérifie immédiatement que $\pi(F \setminus \{0\})$ n'est rien d'autre que l'espace projectif $\mathbb{P}(F)$. Ce sera par définition le sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E_{n+1})$ associé au sous-espace vectoriel F. Sa dimension est $k-1$. Si F est de dimension 1 (c'est-à-dire si F est une droite vectorielle) alors le sous-espace projectif associé est un point, si F est de dimension n alors le sous-espace projectif associé est de dimension $n-1$, on dit alors que c'est un hyperplan projectif.

Lorsque deux sous-espaces F_1 et F_2 de E_{n+1} ont une intersection qui n'est pas réduite au vecteur nul, alors on peut associer un sous-espace projectif au sous-espace vectoriel $F_1 \cap F_2$.

Définition 1.2.8. Nous dirons qu'une famille de points est projectivement indépendante, ou encore projectivement libre, si c'est l'image par π d'une famille de vecteurs linéairement indépendants.

Exemple 1.2.9. Dans un plan projectif, trois points non alignés constituent une famille de points projectivement libre. Dans un espace projectif de dimension 3, quatre points non coplanaires constituent une famille projectivement libre.

Revenons à la section précédente où nous avons représenté les points de l'espace projectif comme les points de l'hyperplan affine H auquel il faut rajouter les points à l'infini de H qui correspondent aux directions parallèles à H. Les points à l'infini de H sont donc associés au sous-espace vectoriel F dont H est le translaté. En conséquence les points à l'infini de H sont les points d'un sous-espace projectif de dimension $n-1$ (rappelons que nous sommes dans le cas où $n \geq 1$).

Définition 1.2.10. Les points à l'infini de $\mathbb{P}(E)$ relatifs à une carte affine H sont les points de $\mathbb{P}(F)$ où F est l'hyperplan vectoriel de E qui est parallèle à H.

Ainsi nous pouvons écrire :

- Si E_{n+1} est une droite vectorielle (cas $n = 0$), alors l'espace projectif correspondant est un point.
- Si E_{n+1} est un plan vectoriel (cas $n = 1$), alors l'espace projectif correspondant est une droite projective qui se décompose en une droite affine à laquelle on ajoute un point à l'infini (cf. figure 1.2).
- Si E_{n+1} est un espace vectoriel de dimension 3 (cas $n = 2$), alors l'espace projectif correspondant est un plan projectif qui se décompose en un plan affine auquel on ajoute une droite projective à l'infini, cette dernière étant elle-même constituée d'une droite affine plus un point à l'infini.
- Plus généralement on peut écrire qu'un espace projectif de dimension $n \geq 1$ peut se représenter comme la réunion d'un espace affine de dimension n (carte affine) et d'un espace projectif dont la dimension est $n-1$, c'est-à-dire un hyperplan projectif (qui n'est pas représenté sur la carte).

Sur la figure 1.2 nous avons représenté une droite projective, c'est-à-dire l'ensemble des directions d'un plan. La droite affine (D) est plongée dans la droite projective de la façon suivante : tout point de la droite projective est définie par une direction du plan et donc est associée à une droite vectorielle du plan ; si cette droite vectorielle coupe (D) en M le point M est un point de la droite projective qui se trouve sur la droite affine (D) ; si cette droite est parallèle à (D) elle définit le point à l'infini de la droite projective par rapport à la droite affine (D).

1.2.4 Les coordonnées homogènes

Système de coordonnées projectives

Nous allons définir sur un espace projectif un système de coordonnées homogènes par le processus suivant. Puisque nous avons construit un espace

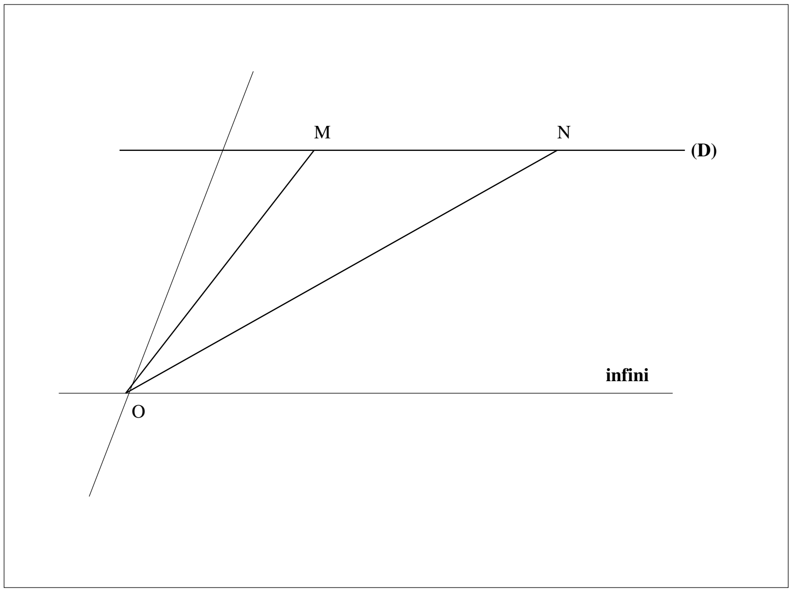

FIGURE 1.2 – Droite affine, droite projective

projectif à partir d'un espace vectoriel, nous allons choisir une base de cet espace vectoriel et regarder comment nous pouvons repérer les points de l'espace projectif.

Soit donc $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ une base de E_{n+1}. Soit x un vecteur non nul de E_{n+1}, ses coordonnées sont $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ où les x_i sont non tous nuls.

Le point correspondant M de l'espace projectif est la classe des points dont les coordonnées sont de la forme $(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1})$ où $\lambda \neq 0$. On peut donc, de la même façon que pour les vecteurs, définir une relation d'équivalence sur les tuples de coordonnées. On notera $(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ la classe de $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ et on dira que ce sont les coordonnées homogènes ou encore les coordonnées projectives du point M. Ainsi par exemple $(1 : 0 : 1) = (2 : 0 : 2)$ et représentent le même point. Remarquons que $(0 : 0 : 0)$ n'existe pas. Le qualificatif « homogène » fait référence à l'égalité

$$(\lambda x_1 : \cdots : \lambda x_{n+1}) = (x_1 : \cdots : x_{n+1}).$$

Remarque 1.2.11. Si on était parti de la base $(\lambda e_1, \cdots, \lambda e_{n+1})$ au lieu de la base $(e_1, \cdots, e_{n+1})$, on aurait obtenu le même système de coordonnées homogènes.