Chapitre 1

Introduction - Évolution de la notion d’intégrale

Résumé

Ce chapitre est une introduction à la notion d’intégrale. Nous donnons quelques indications historiques sur la conception de cette notion et son évolution, en évoquant les trois grandes figures du domaine : Cauchy, Riemann et Lebesgue. Nous présentons la conception d’Henri Lebesgue, qui montre clairement que la définition de l’intégrale est liée à la façon dont nous pouvons attribuer des mesures à certains ensembles. Plus précisément, Lebesgue nous fait remarquer que le découpage du segment d’intégration sur l’axe des x en sous-intervalles n’est pas un bon choix, quand la fonction à intégrer n’est pas continue, pour la raison suivante : en regroupant des x proches, on met dans un même panier des y qui peuvent être très différents et remplacer toutes ces valeurs disparates de y par une même valeur, c’est-à-dire une même hauteur de marche d’escalier, n’est pas justifié. Son idée est de raisonner autrement, et de mettre au contraire des y proches dans un même panier. Mais alors les x correspondants ne sont pas dans un même petit intervalle, mais dans un ensemble plus compliqué, ce qui conduit à savoir attribuer une mesure à ces ensembles plus compliqués.

1.1 Origine de la théorie

La théorie que nous présentons ici a pour point central le travail du mathématicien français Henri Lebesgue (1875 – 1941) qui, à la lumière des travaux antérieurs d’Augustin Cauchy (1789 – 1857) puis de Bernhard Riemann (1826 – 1866), donne dans sa thèse de 1902, intitulée « *Intégrale, longueur, aire* », une nouvelle vision de la notion d’intégrale. Cette nouvelle approche de l’intégration apparaît à une période charnière dans l’évolution de l’analyse. C’est l’époque où l’on passe d’une vision de l’analyse de type « calcul infinitésimal » à une vision de type « analyse fonctionnelle » et « ensemble abstrait ». C’est-à-dire qu’on va d’une part considérer les fonctions comme des points dans des ensembles de fonctions et déterminer des propriétés de ces ensembles au lieu de propriétés particulières à chaque fonction et d'autre part considérer que ces ensembles peuvent être éventuellement abstraits, leurs éléments n'étant spécifiés que par quelques règles de fonctionnement et non pas par leur nature exacte. Dès 1897, Jacques Hadamard (1865 – 1963), écrit dans son texte « *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles* » publié dans les comptes rendus du « Premier Congrès International de Mathématiciens, Zurich 1897, p. 201–202 » les lignes suivantes :

Quoique la théorie des ensembles fasse abstraction de la nature des éléments, on a surtout considéré, jusqu'à présent, les ensembles composés de nombres, ou, tout au plus, de points dans l'espace à n dimensions. Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de fonctions.

Le lecteur intéressé par le développement de l'analyse fonctionnelle entre les années qui vont approximativement de 1900 à 1930 pourra lire le texte très instructif de la conférence de Jacques Hadamard intitulée « *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel* » donnée au Congrès International de Mathématiciens, Bologne 1928, publié dans les actes du colloque vol. 1, 1929, p. 143–162, le texte tout aussi instructif de la conférence de Maurice Fréchet (1878–1973) intitulée « *L'analyse générale et les espaces abstraits* » donnée dans ce même congrès vol. 1, 1929, p. 267–274, ainsi que l'Annexe A du présent ouvrage.

1.2 Intégrale de Cauchy

Cauchy est sans doute le premier à donner une définition, au sens actuel du terme, de la notion d'intégrale définie. Ce souci de rigueur apparaît dans ses divers cours à l'École Polytechnique. Certes, la notion d'intégrale existait auparavant, mais vue essentiellement comme outil applicable à la mécanique par exemple et représentable par addition et soustraction d'aires. Ainsi l'interprétation géométrique de l'intégrale en tant qu'aire, et la possibilité d'approcher cette aire par des aires de rectangles étaient connues, mais ne dépassaient pas le stade de l'intuition géométrique.

Cauchy étudie pour une fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ les sommes :

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

où $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ est un partage σ du segment $[a, b]$ et où ξ_i est un point de $[x_i, x_{i+1}]$. Il montre que ces sommes ont une limite quand le pas du partage tend vers 0 (on remarquera qu'il y a une difficulté pour définir dans cette situation la notion de limite).

Le lecteur intéressé par les divers cours de Cauchy à l'école Polytechnique pourra se référer à l'article de Christian Gilain [Gil89].

1.3 Intégrale de Riemann

L'essor de l'étude des développements des fonctions en séries trigonométriques, étude entreprise par le mathématicien français Joseph Fourier (1768 – 1830) et continuée par le mathématicien allemand Johann P. G. Lejeune Dirichlet (1805 – 1850), nécessitait de savoir intégrer des fonctions non continues. Cauchy avait remarqué que sa définition de l'intégrale pouvait s'appliquer sans que la fonction soit continue en tout point et d'ailleurs depuis longtemps on avait intégré certaines d'entre elles. Riemann cherche la portée exacte de l'intégrale de Cauchy. Il introduit les sommes :

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \quad \text{et} \quad s_\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i),$$

où $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ est un partage σ du segment $[a, b]$ sur lequel on intègre la fonction f, et où :

$$M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f(x)| \quad \text{et} \quad m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f(x)|.$$

Il montre qu'il suffit que $S_\sigma - s_\sigma$ tende vers 0 pour une suite particulière de divisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0 pour que la définition de Cauchy puisse être utilisée.

Si on veut donner une définition de l'intégrale de Riemann en évitant les passages à la limite sur les partages, on peut procéder de la façon suivante : soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a, b]$; définissons :

$$I_*(f) = \sup_{\phi \in \mathcal{E}_f} I(\phi) \;\text{ et }\; I^*(f) = \inf_{\phi \in \mathcal{E}^f} I(\phi),$$

où $\mathcal{E}_f$ (resp. $\mathcal{E}^f$) est l'ensemble des fonctions en escalier majorées (resp. minorées) par f, et où $I(\phi)$ est l'intégrale de la fonction en escalier ϕ ; Les valeurs $I_*(f)$ et $I^*(f)$ sont appelées respectivement l'intégrale inférieure de f et l'intégrale supérieure de f. On dira alors que f est intégrable au sens de Riemann si $I_*(f) = I^*(f)$, son intégrale étant cette valeur commune.

1.4 La conception de Lebesgue

Lebesgue dans une conférence donnée à Copenhague le 8 mai 1926 et publiée dans la revue de Métaphysique et de Morale [1] [Leb27] explique le contexte scientifique de son travail sur l'intégrale et les idées qui l'ont conduit à cette méthode de

1. http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k112390.image.langFR.r=Revue de métaphysique et de morale 1927

construction. Parmi les mathématiciens éminents, rares sont ceux qui, comme Lebesgue, se sont autant attachés à exposer clairement les idées maîtresses qui les ont guidés dans leurs travaux. L'article est d'une très grande clarté ; Lebesgue parvient, tout en évitant les détails techniques, à donner dans ce texte de vulgarisation une idée précise de son intégrale. Il explique que le découpage du segment [a,b] d'intégration sur l'axe des x en sous-intervalles est licite quand la fonction à intégrer est continue, car dans ce cas on regroupe des valeurs $f(x)$ voisines à cause de la continuité. En revanche quand la fonction n'est pas continue, cette façon de faire conduit à regrouper des valeurs $f(x)$ qui peuvent être très différentes. Voici ce qu'en dit Lebesgue dans sa conférence citée précédemment :

> *Du point de vue logique, voici des définitions très naturelles, n'est-ce pas ? Pourtant, on peut dire qu'elles n'ont pratiquement servi à rien. Celle de Riemann, en particulier, a l'inconvénient de ne s'appliquer que rarement et, en quelque sorte, par hasard.*
>
> *C'est qu'en effet, s'il est bien évident que le morcellement de (a, b) en intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits rendra les différences $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ de plus en plus petites si $f(x)$ est continue, en vertu de cette continuité même, s'il est clair que ce morcellement fera tendre encore $\overline{S} - \underline{S}$ vers zéro s'il n'y a que quelques points de discontinuité, on n'a aucune raison d'espérer qu'il en sera de même pour une fonction discontinue partout. Alors, en effet, prendre des intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits, c'est-à-dire des valeurs de $f(x)$ relatives à des valeurs de x de plus en plus voisines, ne garantit nullement que l'on prend des valeurs de $f(x)$ de moins en moins différentes.*

Idée de Lebesgue

Pour définir l'intégrale de Lebesgue on ne morcelle pas l'axe des x en petits intervalles, on regroupe des points qui ont des images voisines. Sur l'axe des x, ces regroupements ne sont plus des intervalles, mais des ensembles plus compliqués.

Si on veut regrouper des points qui ont des images voisines, il suffit de découper l'axe des y en petits intervalles $J_i = (y_i, y_{i+1})$ et récupérer sur l'axe des x les images réciproques de ces intervalles $G_i = f^{-1}(J_i)$. Mais alors les ensembles G_j que l'on a récupérés sur l'axe des x ne sont plus en général des intervalles, mais des images réciproques d'intervalles par des fonctions f qu'on aura à intégrer et auxquels il faut savoir attribuer une mesure. D'où la nécessité de savoir mesurer des ensembles parfois compliqués.

L'intégrale de Riemann est de ce fait mal adaptée dès que les fonctions impliquées sont trop discontinues. On a en fait le résultat suivant (cf. exercice 1.10 page 10) : pour qu'une fonction f bornée sur un segment $[a, b]$ soit intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle, il faut et il suffit que l'ensemble de ses points de discontinuité soit de mesure nulle. Elle est mal adaptée au passage à la limite simple : il est possible de trouver une suite de fonctions bornées intégrables au sens de Riemann qui converge simplement vers une fonction bornée non intégrable au sens de Riemann (cf. exercice

1.1 page 6). De plus, du point de vue de la complétude des espaces, l'intégrale de Riemann n'est pas satisfaisante non plus (cf. exercice 1.2 page 6).

Remarquons enfin qu'en outre il n'est pas nécessaire de mesurer les ensembles qui interviennent avec une mesure uniforme qui mesure un intervalle par sa longueur. On peut attribuer des « *poids* » à ces ensembles, ce qui permet au passage d'incorporer dans la théorie la conception de Thomas-Joannes Stieltjes (1856–1894) de l'intégrale qu'il expose au chapitre VI de « *Recherche sur les fractions continues* (Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, 1ère Série, Tome 8, n. 4, 1894, p. J1–J122) ». C'est bien entendu ce que nous ferons dans ce cours en utilisant des mesures abstraites générales et non pas uniquement la simple mesure $\mathrm{d}x$.

1.5 Diverses façons de concevoir la notion d'intégrale

La notion d'intégrale peut se présenter de divers points de vue qui relèvent généralement des types suivants :

1. Le point de vue de la mesure abstraite : il s'agit de mesurer certains ensembles, puis à partir de là, suivant la méthode de Lebesgue, de définir l'intégrale des fonctions dont l'image réciproque de tout intervalle est un ensemble que l'on sait mesurer. C'est le point de vue que nous adopterons, tout au moins pour commencer, dans ce cours et qu'on peut attribuer à Maurice Fréchet.
2. Le point de vue des formes linéaires continues : on remarque par exemple que l'application I de l'espace $\mathcal{C}[a,b]$ des fonctions continues sur le segment $[a,b]$, muni de la norme uniforme, dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue. Dans cette présentation on appellera mesure de Radon toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}[a,b]$, forme que l'on prolonge ensuite à un espace plus grand. Nous aborderons ce point de vue dans une deuxième partie de ce livre.
3. L'exposé de Percy Danniel (cf. *A general form of integral, Annals of Mathematics 19 : 279–294*), plus général, qui conduit à l'intégrale de Danniel, basée sur une axiomatisation de la classe des fonctions intégrables et de l'intégrale des fonctions de cette classe, établit des ponts entre les points de vue précédents, et montre l'intérêt de la notion de treillis dans les questions relatives à l'intégration.

On peut se demander si une mesure au sens de Radon a un lien quelconque avec une mesure abstraite. Le théorème de Riesz permet de répondre à cette question. Dans le point de vue des mesures de Radon, on définit des mesures liées à une topologie. Cette définition est a priori moins générale que celle des mesures abstraites. Qu'en est-il exactement ? Le théorème de Kakutani (cf. *Concrete Representation of Abstract (L)-Spaces and the Mean Ergodic Theorem. Shizuo Kakutani. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 42, No. 2 (Apr., 1941), pp. 523–537*) permet de répondre à cette question.

1.6 Introduction aux chapitres suivants

Dans les chapitres suivants, nous exposons tout d'abord la théorie de la mesure abstraite. Les mesures sont alors définies comme des fonctions d'ensembles. C'est la formalisation de l'idée intuitive que l'on peut se faire des grandeurs suivantes par exemple : la mesure des longueurs, des aires et des volumes, la charge électrique d'un corps, la probabilité d'un événement.

Dans un premier temps nous étudions les propriétés des mesures positives sur une tribu ; dans un deuxième temps nous montrons comment construire de telles mesures.

Ensuite nous donnons la définition de l'intégrale par rapport à une mesure positive, nous en étudions les propriétés et nous introduisons les espaces de l'intégration.

Enfin, le lien avec les formes linéaires continues, point de vue également très important, est fait en liaison avec l'étude des mesures de signe quelconque et des mesures complexes.

1.7 Exercices

1.7.1 Énoncés

L'exercice 1.1 donne un exemple de suite de fonctions intégrables au sens de Riemann, qui converge vers une fonction bornée, non intégrable au sens de Riemann.

Exercice 1.1. Étudier la fonction :

$$f(t) = \lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\big(\cos(\pi\, m!\, t)\big)^{2n}\right).$$

Montrer que f est bornée, non intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ et qu'elle est limite simple d'une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[0,1]$.

Les exercices 1.2 et 1.3 mettent en évidence le mauvais comportement de l'intégrale de Riemann vis-à-vis de la complétude des espaces de fonctions intégrables. Plus précisément, l'exercice 1.2 montre que l'espace des fonctions continues n'est pas complet pour la norme intégrale, et l'exercice 1.3 montre que le passage à l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann ne suffit pas pour le compléter.

Exercice 1.2. Notons $C[0,1]$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Munissons cet espace de la norme :

$$||f|| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $C[0,1]$ muni de cette norme n'est pas complet. On pourra par exemple étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ où f_n est la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ -n(x - 1/2) & \text{si} \quad 1/2 - 1/n < x < 1/2 + 1/n \\ -1 & \text{si} \quad 1/2 + 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

L'exercice qui suit est placé ici dans un souci de cohérence. Bien que donnant des résultats en termes d'intégration de Riemann, il tire avantage de résultats sur l'intégrale de Lebesgue. Il n'est donc pas conseillé de le faire tout de suite. Il est plus judicieux d'attendre d'avoir étudié le chapitre 4.

Exercice 1.3. Soit $\mathcal{R}[0,1]$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[0,1]$. On considère sur cet espace la semi-norme :

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Si on passe au quotient par la relation d'équivalence : $f \sim g$ si et seulement si $N(f-g) = 0$, on obtient un espace $R[0,1]$ qui est normé par :

$$||\dot{f}|| = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t,$$

où $\dot{f}$ représente la classe de f pour la relation d'équivalence indiquée. Nous allons montrer que $\mathcal{R}[0,1]$ muni de la norme indiquée n'est pas complet et pour cela nous allons construire une variante du compact de Cantor qu'on peut appeler compact de Cantor épais.

1. Montrer qu'on peut construire par récurrence une suite $(E_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles de l'intervalle $[0,1]$ de telle sorte que le complémentaire F_n de E_n soit réunion finie d'intervalles maximaux deux à deux disjoints en posant : $E_1 = [1/3, 2/3]$, puis $E_{n+1} = E_n \cup A_n$ où A_n est construit à partir de E_n de la façon suivante : on prend dans chaque intervalle maximal A du complémentaire F_n de E_n l'intervalle fermé central dont la longueur est $1/3^{n+1} \times$ longueur de A. L'ensemble A_n est la réunion de tous ces intervalles fermés centraux. Posons $E = \cup_{n \geq 1} E_n$ et $F = \complement E$. Montrer que E est dense dans $[0,1]$.
2. Soit χ_{F_n} la fonction caractéristique de F_n. C'est une fonction en escalier dont on note $I(\chi_{F_n})$ l'intégrale. Montrer que :

$$I(\chi_{F_n}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

En conclure que $\lim_{n \to +\infty} I(\chi_{F_n}) = \beta$ où $0 < \beta < 1$. En conclure que $\lim_{n \to +\infty} I(\chi_{E_n}) = \alpha = 1 - \beta$ où $0 < \alpha < 1$.

3. Posons $f_n = \chi_{E_n}$. Montrer que la suite $\left(\dot{f_n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $R[0,1]$ muni de la norme indiquée. Supposons que $\left(\dot{f}\right)_{n\geq 1}$ converge dans $R[0,1]$ vers un élément $\dot{f}$. Montrer que l'on peut alors trouver h dans la classe $\dot{f}$ de telle sorte que $0 \leq h(x) \leq 1$ pour tout x et $h(x) = 1$ pour $x \in E$. Montrer que $I(h) \leq \alpha$. En conclure qu'on peut construire une fonction en escalier $\phi \geq h$ telle que $I(\phi) < 1$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ pour tout x et $\phi(x) = 1$ pour $x \in E$. Étudier alors $\chi([0,1]) - \phi$. Conclure.

L'exercice suivant montre comment on peut définir, pour une classe de fonctions intermédiaire entre celle des fonctions continues et celle des fonctions intégrables au sens de Riemann, une intégrale bien adaptée à la convergence uniforme : l'intégrale des fonctions réglées.

Exercice 1.4. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ ou même dans un espace de Banach F, est dite réglée, si elle est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escalier.

1. Montrer que pour qu'une fonction f définie sur $[a,b]$ soit réglée, il faut et il suffit que pour tout $x \in]a,b[$, f ait une limite à droite et une limite à gauche en x, que f ait une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

   En conclure qu'en particulier toute fonction continue est réglée, et que toute fonction monotone est réglée.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction réglée f. L'intégrale $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ de la fonction en escalier f_n étant définie de la manière habituelle, démontrer que la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ est convergente et que sa limite ne dépend que de f et non pas de la suite $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers la fonction f.
3. On définit alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Comparer cette définition de l'intégrale avec celle de Cauchy et celle de Riemann.

Les deux exercices suivants sont centrés sur la première classe de Baire. Le problème de la construction d'une classe de fonctions stable par passage à la limite simple est posé.

Exercice 1.5. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle qui est limite simple d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues (par définition, f est une fonction de la