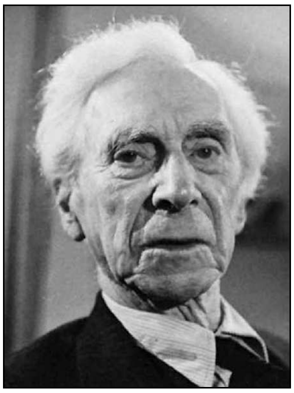
Chapitre 1

Raisonnements Mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier $\cap$ et $\cup$ désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note $\exists$, renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russell
1872-1970

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.
- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence forte (ou généralisée).
- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir raisonner par contraposée.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.
- ▷ Savoir écrire la négation d'une proposition.

Résumé de cours

Les éléments du raisonnement

Proposition

Définition 1.1. — On appelle proposition toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable *x*, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1 — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel *x* strictement positif, "$\ln(x) > 0$" est une proposition dépendante de la variable *x*. Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — "*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*" est une proposition (qui ne dépend pas de l'entier *n*).

Exemple 1.3. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.4. — Pour tout réel *x*, " $(2x+1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

Quantificateurs

Notation — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable *x* signifie "*quel que soit x...*".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable *x* signifie "*il existe (au moins) un x...*".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable *x* signifie "*il existe un unique x...*".

" $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ " se lit : "quel que soit le réel *x*, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel *x*, x^2+1 est strictement positif".

" $\exists x \in\ ]0,+\infty[,\ x^2-6x+1=0$ " se lit : "il existe au moins un réel *x* strictement positif tel que x^2-6x+1 est égal à 0" (il y a d'ailleurs deux tels *x* : $3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ " se lit : "il existe un unique entier naturel *n* non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $\big(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y)\big)$ est différente de $\big(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x,y)\big)$.

Exemple 1.5. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \le x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel *x*, il existe un entier *n*, tel que *x* soit compris entre *n* et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de *x*). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \le x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression "$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \ldots$", il faut noter que x dépend de y, on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.

Exemples 1.6. — Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".
La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$" est : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$ ou $x \geq n+1$".
La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).
Exemple 1.7. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 2,3,4,5 *ou* 6".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).
Exemple 1.8. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?**
⇨ **Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?**
⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?**

Exemple 1.9. — Pour tout réel x, on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* de $\mathcal{Q}$.

⇨ **Méthode 1.5. Comment montrer une équivalence par double implication ?**

Exemple 1.10. — $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \left(\ln a < \ln b\right) \Leftrightarrow \left(a < b\right)$.

Exemple 1.11. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ La contraposition

Définition 1.7. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication $\left(\text{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\,\mathcal{P}\right)$ s'appelle la contraposée de l'implication $\left(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\right)$.

Exemple 1.12. — La contraposée de la proposition "*s'il pleut, alors le sol est mouillé*" est "*si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas*".

Théorème 1.1. — Une implication et sa contraposée sont équivalentes : montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ revient à montrer que si $\mathcal{Q}$ n'est pas vraie, alors $\mathcal{P}$ n'est pas vraie.

$$\left(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\right) \Leftrightarrow \left(\text{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non}\,\mathcal{P}\right)$$

Remarque 1.4. — L'**exercice 1.7** (question **1**) propose un exemple de raisonnement par contraposition.

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.2. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, et on montre qu'il est alors impossible que $\mathcal{Q}$ soit fausse.

$$\left(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\mathcal{P} \text{ et non}\,\mathcal{Q}\right) \text{ est fausse}\right)$$

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

Remarque 1.5. — L'idée de la démonstration par l'absurde est très simple : pour montrer que $\left(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\right)$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse, puis on cherche à établir une contradiction.

❑ Démonstration par récurrence

Récurrence simple

Théorème 1.3. — Pour un entier naturel n, considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, pour un entier naturel n **fixé supérieur ou égal à n_0**, la proposition $\mathcal{P}(n)$ implique la proposition $\mathcal{P}(n+1)$, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

Vocabulaire. — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\big(\mathcal{P}(n)$ est vraie$\big) \Rightarrow \big(\mathcal{P}(n+1)$ est vraie$\big)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.
Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n. C'est pour un entier n **fixé** que l'on montre que, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
Remarque 1.6. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Récurrence finie

Il se peut qu'on ait à montrer une proposition $\mathcal{P}(n)$, non pas pour tout entier naturel n, mais pour un nombre fini d'entiers successifs, mettons de l'entier n_1 à l'entier n_2, où $n_1 < n_2$. On a alors la version suivante :

Théorème 1.4. — Si $\mathcal{P}(n_1)$ est vraie et si, pour un entier n **fixé** de $[\![n_1, n_2 - 1]\!]$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $[\![n_1, n_2]\!]$.

Récurrence d'ordre p (avec $p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

Théorème 1.5. — Pour un entier naturel n, considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$.
Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies et si, pour un entier naturel n **fixé** de $\mathbb{N}$, les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), ..., \mathcal{P}(n+p-1)$ impliquent $\mathcal{P}(n+p)$, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $\mathbb{N}$.

⇨ **Méthode 1.7. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?**

Récurrence forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au $n^{\text{ème}}$ (et non pas seulement au $n^{\text{ème}}$), pour en montrer la vérité au rang $(n+1)$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.6. — Pour un entier naturel n, considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$.
Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si, pour un entier naturel n **fixé**, en supposant les propositions $\mathcal{P}(k)$ vraies pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier naturel n.

⇨ **Un exemple de démonstration par récurrence forte sera donné au chapitre 2**

Remarque 1.7. — On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier n donné, on a besoin de la vérité de $\mathcal{P}(n)$ et de $\mathcal{P}(n+1)$ pour établir celle de $\mathcal{P}(n+2)$. La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire $\mathcal{P}(1)$ de $\mathcal{P}(0)$: il faut $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ pour obtenir $\mathcal{P}(2)$, puis enclencher la récurrence.

■■ Méthodes

■ Comparaison d'expressions

❑ Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?

Si une fonction *f* est monotone sur un ensemble *I*, et si *x* et *y* appartiennent à *I*, alors comparer *x* et *y* suffit pour comparer $f(x)$ et $f(y)$.
Plus précisément :
- Si *f* est croissante sur *I*, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- Si *f* est décroissante sur *I*, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Remarque : si l'on veut établir des équivalences au lieu d'implications, il faut signaler en plus la bijectivité de *f* (ce qui établit l'implication réciproque grâce aux variations de f^{-1} qui sont les mêmes que celles de *f*).

⇨ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que quel que soit l'entier *n* supérieur ou égal à 2, on a :

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{(nous noterons cette inégalité } (I)\text{)}$$

Remarque importante de présentation — Nous allons commencer par une analyse qui se fait au brouillon, ou même, avec un peu d'habitude, mentalement. Nous proposerons une rédaction "au propre" dans un second temps.

Au brouillon :

- Compte tenu des règles sur les exposants, (I) s'écrit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.
- Puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque les deux membres de l'inégalité sont positifs (car $n \geq 2$), alors cette dernière inégalité équivaut à la suivante :

$$1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

- Mais, en développant le membre de droite, nous nous rendons compte que cette inégalité est évidente. En effet, elle s'écrit : $1-\frac{2}{n} \leq 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire : $0 \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui est vrai.

Sur la copie :

Méthodes

Il suffit de "partir" de la fin du raisonnement au brouillon :

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \geq 1-\frac{2}{n}$ (car $\frac{1}{n^2} \geq 0$) donc : $1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$.

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et chaque membre est positif (car $n \geq 2$)

donc : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

Cette inégalité s'écrit bien : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

❑ Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?

> Si l'inégalité que l'on se propose de prouver ne peut pas se mettre sous la forme étudiée à la **méthode 1.1,** alors en "passant tout" dans un même membre, on se ramène à prouver qu'une expression est positive (ou négative, selon les cas). Il sera par exemple possible, mais non obligatoire (voir ci-dessous), d'étudier les variations de la fonction définie par cette expression.

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Pour tout réel x positif, on a la chance de constater que : $x-2\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Comme un carré est positif, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-2\sqrt{x}+1 \geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Exemple 2. Montrer que : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$.

On pose $f(x) = x - \ln(1+x)$ et on étudie la fonction f sur $\left]-1, +\infty\right[$.

Cette fonction est bien sûr dérivable et on a : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

Comme $1+x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x, ce qui prouve que f décroît sur $\left]-1, 0\right[$ et croît sur $\left]0, +\infty\right[$. Elle est donc minimale pour $x=0$.

On a alors : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f(x) \geq f(0)$. Comme $f(0)=0$ on obtient : $x-\ln(1+x) \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$