A. *O*utils pour le signal et les systèmes

Chap. 1. *P*ré-requis

*B*ases pour aborder ce chapitre

	Compétence requise : connaître, savoir utiliser	niveau
1	la géométrie euclidienne, les théorèmes de Pythagore et de Thalès	Terminales S et STI
2	les règles de calcul algébrique	Terminales S et STI

*C*ontenu du chapitre

Séquence n°	Compétence visée : connaître, maîtriser	Diaporama	DIT[1] n°	pages
1	la trigonométrie		1, 2, 6	4-8, 13-14
2	les nombres complexes		3, 6	9, 13-14
3	la dérivation	2 slides	4, 7	10-11, 15-16
4	l'intégration	27 slides	5, 7	12, 16-17
5	les développements limités		8	18-21

*M*éthodologie de travail

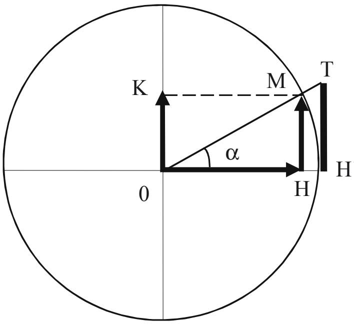
Modalité pédagogique	Méthodes et outils
Enseignement présentiel et travail personnel	- l'interactivité en cours est facilitée par les questions qui figurent sur les DIT[2] auxquelles doivent répondre les étudiants, à tour de rôle, et par le dialogue et les échanges qui s'ensuivent, en se référant aux résumés de cours que constituent les diaporamas[2] de ce module - l'étudiant porte sa réponse provisoire puis définitive sur le DIT. Une fois le cours terminé il est en possession d'un document de travail explicite, progressif, structuré, illustré et commenté - le travail personnel consiste à s'exercer à retrouver les définitions et les propriétés autant de fois qu'il le faut pour les maîtriser et pour savoir faire les exercices et les problèmes en autonomie - ces méthodes interactives sont praticables par Internet

[1] DIT : document interactif de travail

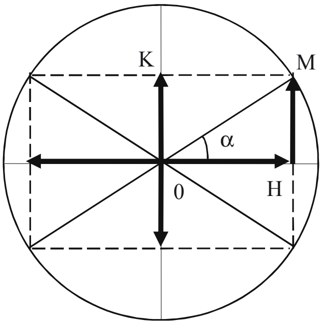
[2] S'adresser à rossetto.bruno@orange.fr pour un envoi sans frais des DIT vierges à compléter, évolutifs et adaptables, ainsi que des diaporamas.

DIT 1. *O*bjectif : être autonome en trigonométrie

Sur une île déserte (devant sa copie), savoir retrouver les formules trigonométriques



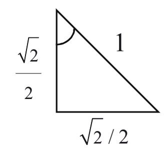
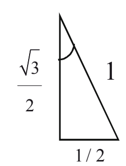
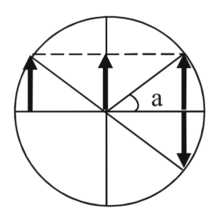
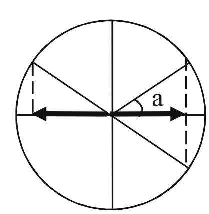
Nom	Définir par une formule	Définir par une phrase
sinus	$\sin\alpha = \dfrac{\overline{HM}}{\overline{OM}}$	côté opposé sur hypothénuse
cosinus	$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$	côté adjacent sur hypothénuse
tangente	$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\overline{H'T}}{\overline{OH'}}$	si $OH' = 1$ (cercle trigonométrique) $\lvert\tan\alpha\rvert = H'T$: c'est la ... tangente



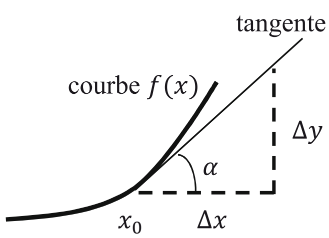
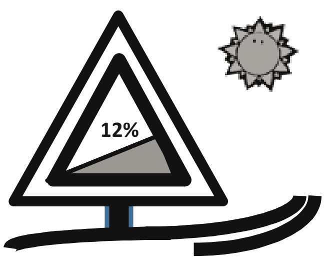
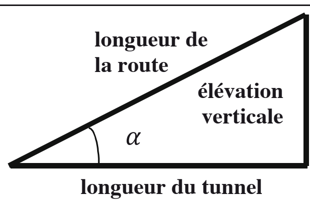
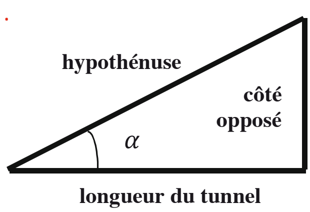
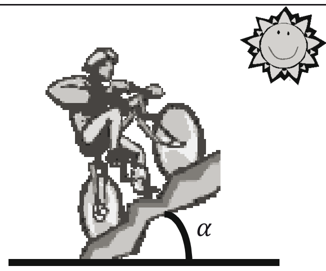
lien entre	par une formule	par une phase
sinus	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha = \dfrac{\overline{OK}}{\overline{OM}}$	deux angles *supplémentaires* ont même sinus
cosinus	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$	deux angles *opposés* ont même cosinus
tangente	$\tan(\pi+\alpha) = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$	deux angles qui différent de $\pm\pi$ ont même tangente

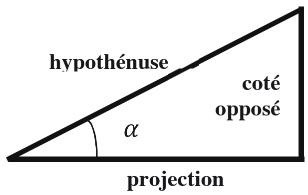
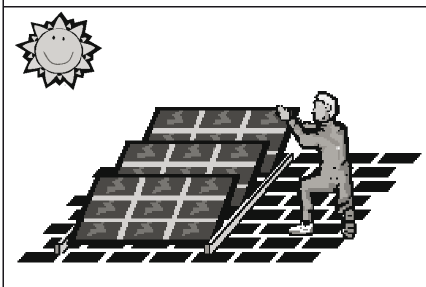
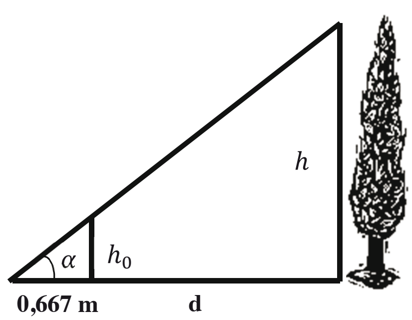
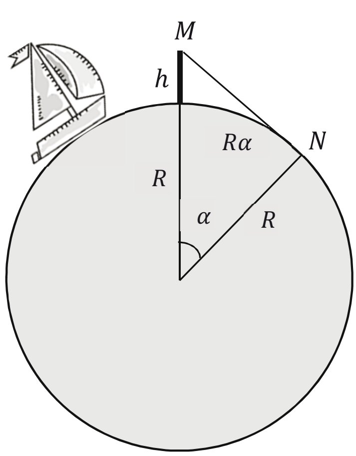
*O*bjectif : à partir des formules d'addition de sin et de cos retrouver toutes les autres

NOM	FORMULE	METHODE
Formules d'addition	$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$ $sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$ $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$ $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$	Par cœur
Formule d'addition des tangentes	$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	Dans les formules d'addition, diviser le numérateur et le dénominateur par $cos(a)cos(b)$
Expressions en fonction de l'angle moitié	$sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$ $cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$ $tan(2a) = \dfrac{2\,tan(a)}{1-tan^2(a)}$	On fait $a = b$ dans les formules d'addition
Expression de $sin^2(a)$ et de $\cos^2$ (a) en fonction de $cos(2a)$	$sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ $cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$	A partir de $cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$ puis en appliquant le théorème de Pythagore : $sin^2(a) + cos^2(a) = 1$
Transformation des produits en somme	$sin(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)]$ $cos(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$ $sin(a)sin(b) = \dfrac{1}{2}[cos(a-b) - cos(a+b)]$	Demi somme des formules d'addition de $sin(a+b)$ et $sin(a-b)$ Demi somme des formules d'addition de $cos(a+b)$ et $cos(a-b)$ Demi différence des formules d'addition de $cos(a-b)$ et $cos(a+b)$
Transformation des sommes en produits	$cos(p) + cos(q) = 2\,cos\dfrac{p+q}{2}cos\dfrac{p-q}{2}$ $sin(p) + sin(q) = 2\,sin\dfrac{p+q}{2}cos\dfrac{p-q}{2}$	On pose $p = a+b$ et $q = a-b$, ce qui entraîne $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$

<table>
<tr><th>NOM</th><th>FORMULE</th><th>METHODE</th></tr>
<tr><td>Valeurs pour quelques angles remarquables</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>sin</td><td>$\frac{\sqrt{0}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{1}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{4}}{2}$</td></tr>
<tr><td>sin</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>1</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>tan</td><td>0</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>1</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>∞</td></tr>
</table>
</td><td>- Valeur des angles : au numérateur : π, au dénominateur tous les sous-multiples de 12
- Valeur des $\boldsymbol{sin}$: on remplit systématiquement la première ligne comme indiqué
- Valeur des $\boldsymbol{cos}$: les angles complémentaires échangent leur sin et cos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autre méthode</td><td>$sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>Théorème de Pythagore dans le quart de carré de côté 1 </td></tr>
<tr><td>$sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$</td><td>Théorème de Pythagore dans le demi triangle équilatéral de côté 1 </td></tr>
<tr><td>Les sin en dehors du premier quadrant</td><td>$sin(-a) = -sin(a)$
$\sin(\pi - a) = sin(a)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Les cos en dehors du premier quadrant</td><td>$cos(-a) = cos(a)$
$cos(\pi - a) = -cos(a)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Les tan en dehors du premier quadrant</td><td>$tan(-a) = -tan(a)$
$tan(\pi + a) = tan(a)$</td><td>A partir des deux lignes précédentes</td></tr>
</table>

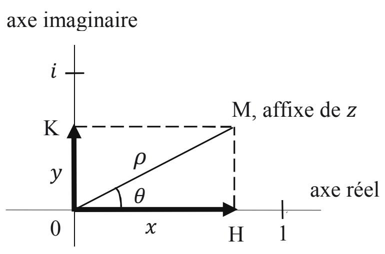
DIT 2. *T*rigonométrie pratique

	L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ est représentée ci-contre par un arc de courbe. La valeur de sa dérivée $f'(x_0)$ est le *coefficient directeur*, ou *coefficient angulaire*, ou encore la *pente* de la tangente à cette courbe au point d'abscisse x_0 . Ce coefficient directeur $f'(x_0)$ est égal à $\sin\alpha$ ..... ☐ $\cos\alpha$ ..... ☐ $\tan\alpha$ ..... ☒
	Le panneau ci-contre indique une montée de 12 %. Ce pourcentage est égal au sin de l'angle de montée ..... ☒ au cos de l'angle de montée ..... ☐ à la tan de l'angle de montée ..... ☐
 	$\sin\alpha = \dfrac{\textbf{élévation verticale}}{\textbf{longueur du tunnel}}$? ☐ $\sin\alpha = \dfrac{\textbf{élévation verticale}}{\textbf{longueur de la route}}$? ☒ $\sin\alpha = \dfrac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypothénuse}}$? ☒ $\sin\alpha = \dfrac{\textbf{côté adjacent}}{\textbf{hypothénuse}}$? ☐
	Revenons au panneau routier ci-dessus. La mesure de la pente a donné 12 %. Ce pourcentage est égal à (ce qui évite de creuser un tunnel pour la mesurer !) $\sin\alpha$ ..... ☒ $\cos\alpha$ ..... ☐ $\tan\alpha$ ..... ☐

 	$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\textbf{projection de l'hypothénuse}}{\textbf{longueur de l'hypothénuse}}$? X $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\text{côté } \textbf{adjacent}}{\textbf{hypothénuse}}$? X
	Le panneau solaire ci-contre a une largeur de 1 m et fait un angle α de 30 ° avec le toit. L'emprise (la largeur qu'il occupe, la ***projection***) sur le toit est de C'est la projection, donc cos 30°, soit $0{,}866\ m$ X $0{,}707\ m.$ ☐ $0{,}5\ m.$ ☐
 	On peut évaluer la hauteur h en mesurant h_0 au bout de son bras, de longueur $0{,}667\ m$. Calculer h en fonction de h_0 et d. $\tan\alpha = \dfrac{h_0}{0{,}667} = \dfrac{h}{d}$ $h = \dfrac{3}{2} h_0 d$ *Remarque*. Ceci revient à appliquer le théorème de Thalès.
 	Un maître-nageur M est juché sur un siège de hauteur h. A quelle distance maximale MN peut-il voir un nageur N en fonction de h, $R = 6\,371\ km$ étant le rayon de la Terre ? Pour un angle α très petit, un développement limité au 2ème ordre donne $\sin\alpha \cong \tan\alpha \cong \alpha$ et $\cos\alpha \cong 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$ $\tan\alpha = \dfrac{MN}{R} = \alpha$, soit $MN = R\alpha$ $\cos\alpha = \dfrac{R}{R+h}$, soit $-\dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{R}{R+h} - 1 = \dfrac{-h}{R+h}$ $\alpha^2 = \dfrac{2h}{R+h} \cong \dfrac{2h}{R}$ et $MN = R\sqrt{\dfrac{2h}{R}} = \sqrt{2hR} = 3\,570\,\sqrt{h}$ A N. Pour $h = 1{,}75$ m, $MN = 4\,722\ m$ et, pour $h = 5\ m$, $MM = $7 982 m

DIT 3. *N*ombres complexes

Définitions relatives à un nombre z appartenant au corps des complexes $\mathbb{C}$

	Forme algébrique	$z = x + i\,y, z \in \mathbb{C}, i = \sqrt{-1}$ x $\in \mathbb{R}$: partie réelle, y $\in \mathbb{R}$: partie imaginaire
	Forme trigonométrique	$z = \rho\, e^{i\theta}$ $\rho \in \mathbb{R}^+$: module θ : argument, $0 \le \Theta < 2\pi$
	Conjugué : $z^* = x - i\,y = \rho\, e^{-i\theta}$ (pour obtenir le conjugué, changer i en $-i$)	

Opération		**Expression**	**Remarques**
Passage	algébrique → trigonométrique	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,z^*}$ $\theta = Arctan\dfrac{y}{x}$ $(+\pi\ si\ x < 0)$	Att. ! $Arctan$ est défini pour $-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$, si $x < 0$, ajouter π
	trigonométrique → algébrique	$x = \rho\cos(\theta)$ $y = \rho\sin(\theta)$	A partir de la représentation
Addition et soustraction $\boldsymbol{z = z_1 \pm z_2}$	algébrique	$x = x_1 \pm x_2$ $y = y_1 \pm y_2$	Simple
	trigonométrique		Moins utile
Multiplication $\boldsymbol{z = z_1 z_2}$	algébrique	$x = x_1x_2 - y_1y_2$ $y = x_1y_2 + y_1x_2$	Moins utile
	trigonométrique	$\varrho = \rho_1\rho_2$ $\theta = \theta_1 + \theta_2$	On multiplie les modules et on ajoute les arguments
Division $\boldsymbol{z = \dfrac{z_1}{z_2}}$	algébrique		Moins utile
	trigonométrique	$\varrho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ $\theta = \theta_1 - \theta_2$	On divise les modules et on soustrait les arguments
Puissance $\boldsymbol{z^r}$ **r entier relatif (puissance) ou fractionnaire (racine)**	trigonométrique	module : ρ^r argument : $r(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ Si r est fractionnaire, il y a n déterminations, $1 \le k \le n$. Pour les obtenir, prendre des valeurs entières successives de k, jusqu'à retomber sur les mêmes résultats, à 2π près.	Attention aux n résultats si r est un nombre fractionnaire (cas d'une racine). *Exemples.* Les 3 racines cubiques de l'unité. Voir aussi la transformée de Fourier discrète et la FFT.

DIT 4. *O*bjectif : être autonome en calcul de dérivées

Propriétés de la dérivation

Soit les fonctions de la variable réelle x, dans l'intervalle où elles sont continues : f et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ et $g(x)$		**Dérivée par rapport à x**	**Commentaires**
Notation	$f(x)$	$f'(x) = \frac{df}{dx}$	
Ctte réelle ou complexe	C	0 (zéro)	
Linéarité : si C et D sont des constantes réelles ou complexes	$C\,f(x) + D\,g(x)$	$C\,f'(x) + Dg'(x)$	La dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées

Quelques dérivées usuelles

Puissance entière ou fractionnaire, positive ou négative	x^r , $r \neq 0$	rx^{r-1}	Exemples : dérivées de $\sqrt{x}$, x^n, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$
Exponentielle	e^x	e^x	seule fonction inchangée par dérivation
Logarithme	$ln(x),\ x > 0$	$\frac{1}{x}$	vient de la définition même de $ln(x)$
Sinus	$sin(x)$	$cos(x)$	
Cosinus	$cos(x)$	$-sin(x)$	
Tangente	$tan(x)$	$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	
Arctangente	$Arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	à retrouver à partir des fonct. inverses (cf. ci-dessous)

Utilisation de la notation différentielle

	Fonction de la variable réelle x	**Dérivée par rapport à x**	**Commentaires**
Fonction de u, qui est fonction de x	$f[u(x)]$	$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$	Les éléments différentiels, par exemple dx, sont des nombres algébriques comme les autres
Application	$sin(ax+b) = \sin(u)$	$u' \cos u = a\,cos(ax+b)$	