CHAPITRE 1

Introduction

Un système linéaire est un ensemble de m équations linéaires en n inconnues que l'on représente sous la forme matricielle :

$$Ax = b. \tag{1.0.1}$$

La matrice A de m lignes et n colonnes et le vecteur b de m composantes constituent les données, le vecteur x regroupe l'ensemble des n inconnues. Le problème à résoudre consiste alors à chercher, par des méthodes analytiques ou numériques, l'ensemble des solutions de (1.0.1).

1.1. Un peu d'histoire

La recherche de la solution d'un problème linéaire n'est pas une demande nouvelle. Des vestiges archéologiques montrent que, relativement à des questions agricoles, de tels problèmes se sont posés dès l'Antiquité. La trace la plus ancienne connue remonte aux babyloniens, où sur une tablette datée du IVe siècle av. J.-C. (Fig. 1.1.1 [1]) on trouve le problème suivant :

> Texte : *Il y a deux champs dont la surface totale fait 1800* pas^2. *Le premier produit des grains avec un rendement de 2/3 de boisseau par* pas^2 *et le deuxième a un rendement de 1/2 boisseau par* pas^2. *La récolte totale ayant été de 1100 boisseaux, quelle est la surface de chaque champ ?*

La traduction par le formalisme matriciel conduit à introduire les quantités inconnues S_1 et S_2 correspondant aux surfaces de chaque champ. On obtient le système linéaire :

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= 1800, \\ \frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{2}S_2 &= 1100, \text{ soit } 4S_1 + 3S_2 = 6600, \end{aligned}$$

qui se met sous la forme (1.0.1) avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 1800 \\ 6600 \end{bmatrix}.$$

1. Image publiée avec l'autorisation gracieuse de The Schøyen Collection, Norvège (`http://www.schoyencollection.com/`).

FIGURE 1.1.1. Tablette babylonienne (©The Schøyen Collection).

Un peu plus tard, sur un manuscrit chinois daté entre le II^{e} siècle av. J.-C. et le I^{er} siècle (Fig. 1.1.2 [2]) on trouve le problème suivant :

> Texte : *Il y a trois types de céréales. Trois tonneaux de la première, deux tonneaux de la deuxième et un tonneau de la dernière font 39 mesures. Deux de la première, trois de la deuxième et un tonneau de la dernière font 34 mesures. Un de la première, deux de la deuxième et trois tonneaux de la dernière font 26 mesures.*

En notant n_1, n_2 et n_3 le nombre de mesures d'un tonneau de la première, de la deuxième et de la troisième céréale, le problème posé se traduit par les trois relations :

$$\begin{aligned} 3n_1 + 2n_2 + n_3 &= 39, \\ 2n_1 + 3n_2 + n_3 &= 34, \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 &= 26, \end{aligned}$$

2. Image publiée avec l'autorisation gracieuse du Needham Research Institute, Cambridge, England (`http://www.nri.org.uk`).

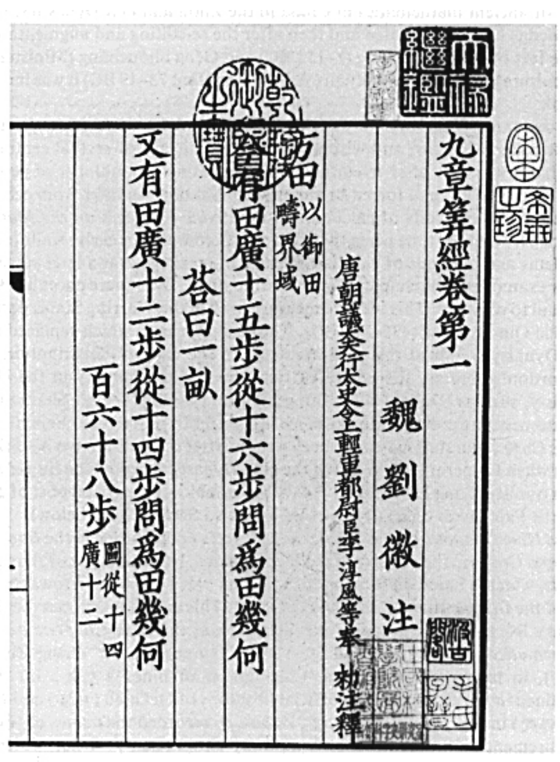
九章筭經卷第一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勑注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

FIGURE 1.1.2. Manuscrit chinois (©Needham Research Institute).

qui se mettent sous la forme (1.0.1) avec :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Contrairement à la tablette babylonienne où aucune méthode de résolution n'est proposée, le texte chinois envisage un embryon de technique par élimination de variables préfigurant ainsi la méthode d'élimination de Gauss qui ne sera véritablement comprise qu'au XIX$^{\text{e}}$ siècle.

Entretemps il faudra attendre le XIV$^{\text{e}}$ siècle et Jérôme Cardan (1501–1576) avec son traité *Ars Magna* (1545) pour voir énoncée la règle de résolution (*Regula de modo*) d'un système de 2 équations à 2 inconnues qui annonce le traitement connu plus tard sous la forme des règles de Cramer. Notons que Cardan n'utilise pas la notion de déterminant d'une matrice. Le déterminant d'une matrice ne sera proposé qu'en 1683 simultanément par deux auteurs, au Japon, Takakasu Seki Kowa (1642–1708), et en Europe, Gottfried von Leibniz

(1646–1716). Ce dernier, dans une lettre à Guillaume de L'Hopital (1661–1704), exprime la compatibilité d'un système à l'aide du développement d'un déterminant.

Cependant, pour concevoir des techniques utilisables pour tous les systèmes linéaires, il manque une formulation générique conduisant à une méthode systématique de résolution. La formulation (1.0.1) n'existe pas encore !

Au XVIII^{e} siècle, les idées commencent à avancer avec, en 1730, le *Treatise of algebra* de Colin Maclaurin (1698–1746) et en 1750, l'*Introduction to the theory of algebraic curves* de Gabriel Cramer (1704–1752) où se trouve la célèbre règle de Cramer de résolution d'un système linéaire :

> Règle de Cramer : *One finds the value of each unknown by forming n fractions...*

Jusqu'à la fin du XVIII^{e} siècle, le développement des techniques de résolution est essentiellement mené par les grands mathématiciens de cette époque, à savoir, Étienne Bézout (1730–1783), Alexandre Vandermonde (1735–1796), Pierre-Simon Laplace (1749–1827) et Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

Les bases pour une méthode de traitement systématique vont être consolidées au XIX^{e} siècle avec Carl Gauss (1777–1855) qui, en 1809, décrit l'élimination, qui portera son nom, pour résoudre un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues. Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), par son travail sur des tableaux de nombres qui préfigurent la notion de matrice à deux dimensions, introduit en 1812 le terme de *déterminant* puis définit les notions de diagonalisation, de valeur propre et de matrices semblables. Il revient à James Sylvester (1814–1895) en 1850 d'introduire pour la première fois le terme de *matrice* pour désigner ces tableaux bidimensionnels. Arthur Cayley (1821–1895), qui a rapidement vu l'intérêt que l'on pouvait tirer de la notion de matrice, publie en 1858 le traité *Memoir on the theory of matrices*. Dans cet ouvrage, qui ne propose pas vraiment de théorie algébrique pour les matrices mais étudie des calculs sur l'objet matrice, il invente l'inversion matricielle et la notion d'équation caractéristique. Suivront ensuite en 1870, la forme canonique de Camille Jordan (1838–1922) puis en 1878 le théorème de Cayley-Hamilton et la notion de rang d'une matrice par Georg Frobenius (1849–1917).

Comme nous le verrons par la suite, les règles de Cramer, lorsqu'elles sont applicables, sont à éviter d'un point de vue numérique. En effet, l'inversion est utile dans une approche formelle et théorique mais le temps de calcul augmente très vite avec la taille de la matrice, sauf si elle est facile à inverser. Cette remarque constitue le principe de pratiquement tous les algorithmes de résolution des systèmes linéaires. Par contre, le rang d'une matrice est d'une importance capitale et nous verrons que, là aussi, il y a lieu de distinguer le rang d'une matrice de son rang numérique.

Au XX^{e} siècle, le calcul matriciel devient une branche à part entière des mathématiques car il reçoit une base algébrique avec l'ouvrage *Introduction to higher algebra* en 1907 de Maxime Bôcher (1867–1918). Il faudra attendre le milieu du XX^{e} siècle pour que paraissent les premiers ouvrages sur le calcul matriciel avec tout d'abord, en 1955, celui de Leon Mirsky (1918–1983) :

An introduction to linear algebra.

Puis suivront assez rapidement :

Cyrus C. Mac Duffee, *The theory of matrices*, Courier Dover Publications, 1956 ;

Feliks R. Gantmakher, *Theory of matrices*, American Mathematical Society, 1959 (trad. française, F.R. Gantmacher, *Théorie des matrices*, Dunod, 1966) ;

Vera N. Faddeeva, *Computational methods of linear algebra*, Dover Publications, 1959 ;

Edwald Bodewig, *Matrix calculus*, Noth Holland Publishing Company, 1959 ; et, plus attachés à la résolution pratique de systèmes linéaires :

Richard S. Varga, *Matrix iterative calculus*, Prentice-Hall, 1962 ;

Alston S. Householder, *The theory of matrices in numerical analysis*, Blaisdell Publishing Company, 1964 ;

André Korganoff, Monica Pavel-Parvu, *Méthodes de calcul numérique*, tome 2, *Éléments de théorie des matrices carrées et rectangles*, Dunod 1967.

Pour les années suivantes le lecteur trouvera d'autres références au début de [**97**]. Par ailleurs, pour situer la place du traitement des équations linéaires l'histoire plus vaste des mathématiques, le lecteur peut consulter [**175, 57**].

Bien avant l'utilisation des ordinateurs dont la naissance commence en 1938 avec le Z1 de Konrad Zuse, l'ABC (Atanassoff-Berry Computer) en 1939 de John V. Atanassoff et Clifford Berry, et la construction de l'ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) en 1946 de John P. Eckert et John W. Mauchly [**122**], le calcul numérique et la précision des résultats dans le traitement des données a été un élément fondateur de l'analyse numérique. Plusieurs points peuvent être mentionnés à ce sujet : la sensibilité du résultat obtenu relativement à des erreurs sur les données ; la minimisation du nombre d'opérations nécessaires dans un algorithme ; la mémoire requise pour le stockage et le déroulement correct des algorithmes. Le premier point est abordé dans le chapitre 1 relativement au conditionnement des systèmes linéaires. En effet il s'agit, dans une étape préliminaire à tout traitement numérique d'un système linéaire, de prévoir quelle peut être l'influence d'erreurs dans les données ou d'erreurs de troncature des nombres dans la confiance à accorder au résultat numérique obtenu. Par contre nous avons volontairement choisi de ne pas aborder les notions de complexité relative au temps de calcul ou au nombre d'opérations élémentaires nécessaires aux algorithmes de traitement. En effet ces problèmes, essentiels en traitement numérique des données, nécessitent des ouvrages d'analyse particuliers qui ont assez rapidement un caractère technique élevé. Pour de plus amples développements le lecteur peut consulter [**141, 9**] ou, plus particulièrement sur le traitement matriciel [**190, 3**]. Cependant afin d'illustrer que le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à l'exécution d'une fonction donnée peut être amélioré par l'utilisation judicieuse d'une formulation adaptée, on peut étudier l'algorithme proposé par Volker Strassen en 1969 [**97**] pour la multiplication matricielle.

Exercice 1.1 (Algorithme de Strassen). Considérons deux matrices :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

où les quantités a, b, $\ldots$, δ sont des scalaires réels. La matrice C, produit matriciel de A par B, est définie directement par :

$$C = AB = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}.$$

(1) Montrer que l'organisation suivante des calculs (algorithme de Strassen [**3, 97**]) :

$$\begin{aligned} q_1 &= (a+d)(\alpha+\delta), \\ q_2 &= (c+d)\alpha, \\ q_3 &= a(\beta-\delta), \\ q_4 &= d(\gamma-\alpha), \\ q_5 &= (a+b)\delta, \\ q_6 &= (c-a)(\alpha+\beta), \\ q_7 &= (b-d)(\gamma+\delta). \end{aligned}$$

permet le calcul des coefficients de C par :

$$C = AB = \begin{bmatrix} q_1 + q_4 + q_7 - q_5 & q_3 + q_5 \\ q_2 + q_4 & q_1 + q_3 + q_6 - q_2 \end{bmatrix}.$$

(2) Comparer le nombre d'opérations nécessaires à chacune des deux approches précédentes pour calculer le produit matriciel de deux matrices d'ordre 2.

(3) Dans le cas où les quantités a, b, $\ldots$ à δ sont des matrices carrées d'ordre 2^k , calculer les nombres de multiplications, $M(k)$, et d'additions, $A(k)$, nécessaires pour multiplier deux matrices de taille $(2^k \times 2^k)$ par l'algorithme direct et par l'algorithme de Strassen. $\diamondsuit$

Cet exercice montre que l'obtention du nombre d'opérations minimal dans un algorithme numérique est un problème complexe qui d'ailleurs motive en permanence les recherches en algorithmique. Toujours en ce qui concerne le produit matriciel, les travaux récents comme :

Coppersmith, D., Winograd, S. Matrix multiplication via arithmetic progressions. *J. Symbolic Computation*, vol. 9, n. 3, pp. 251–280, 1990 ;

Cohn, H., Kleinberg, R., Szegedy, B., Umans, C., Group-theoretic algorithms for matrix multiplication, *46th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science* (FOCS'05), pp. 379–388, 2005 ;

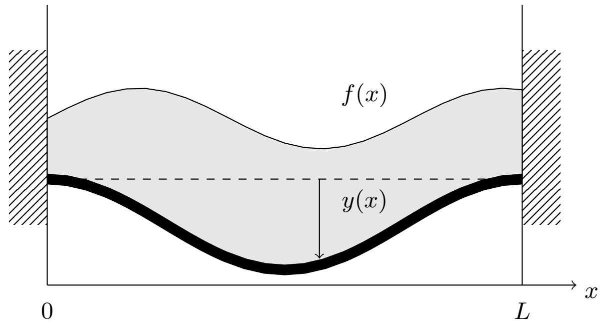

FIGURE 1.2.1. Poutre chargée.

Stothers, A., *On the complexity of matrix multiplication*, Ph. D., University of Edinburgh, 2010 ;

Williams, V. , Breaking the Coppersmith-Winograd barrier, `http://www.cs.berkeley.edu/~virgi/matrixmult.pdf`, 2011,

montrent qu'une multiplication matricielle de deux matrices carrées d'ordre n peut être réalisée en un temps proportionnel à $n^{2.37}$. Cependant les algorithmes les plus rapides demandent des capacités de stockage qui les rendent peu efficaces en pratique. C'est la raison pour laquelle on préfère encore utiliser l'algorithme de Pan-Kaporin qui réalise la multiplication matricielle en $n^{2.77}$opérations [**131, 29**]. Mettre au point des algorithmes rapides de multiplication matricielle est d'une importance primordiale puisque le temps de calcul du déterminant, du polynôme caractéristique, de l'inverse, du rang ou d'une base du noyau est proportionnel au temps de calcul du produit matriciel [**29**].

1.2. Quelques exemples de systèmes linéaires

La simplicité de ces exemples ne doit pas oblitérer le fait que les systèmes linéaires de grandes dimensions, comme par exemple ceux rencontrés en traitement d'images ou en analyse statistique, sont monnaie courante en ingénierie. Leur choix est motivé ici pour insister essentiellement sur deux points : tous les systèmes rencontrés en pratique ne sont pas carrés, c'est-à-dire il n'y a pas toujours autant d'équations que d'inconnues, et ils n'admettent pas toujours une solution unique.

1.2.1. Flexion de poutre chargée. Considérons une poutre encastrée en ses deux extrémités (Fig. 1.2.1), de longueur L, qui subit une charge répartie $f(x)$ sur toute sa longueur, soit pour $0 \leq x \leq L$.

Les lois de la résistance des matériaux conduisent à l'équation aux limites suivante [**205**] :

$$(\alpha(x)y''(x))'' = f(x), \tag{1.2.1}$$

où $(.)''$ représente la dérivée seconde relativement à x. En notant $(.)'$ la dérivée première relativement à x, les conditions limites :

$$y(0) = y(L) = 0 = y'(0) = y'(L) = 0,$$

traduisent l'encastrement aux deux extrémités.

Pour simuler le comportement de la poutre chargée, choisissons de discrétiser le domaine $[0, L]$ avec un pas de discrétisation Δ. On définit ainsi la valeur des variables en des points $x_i = i\Delta$ pour $i = 0$ à $N+1$ avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = L$, soient :

$$y = y(x_i),\ \alpha_i = \alpha(x_i),\ f_i = f(x_i).$$

L'application d'une technique simple de différences finies [**48, 104, 60**] conduit à approcher les dérivées secondes sous la forme :

$$u''(x) \cong \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta^2},$$

ce qui donne :

$$(\alpha(x)y''(x))'' \cong \frac{\alpha_{i-1}y''_{i-1} - 2\alpha_i y''_i + \alpha_{i+1}y''_{i+1}}{\Delta^2},$$

soit finalement l'approximation :

$$\begin{aligned}\Delta^4(\alpha(x)y''(x))'' \ \cong\ & \alpha_{i-1}y_{i-2} - 2(\alpha_{i-1}+\alpha_i)y_{i-1} + \\ & (\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1})y_i - 2(\alpha_i + \alpha_{i+1})y_{i+1} + \alpha_{i+1}y_{i+2}.\end{aligned}$$

La traduction des conditions limites au niveau des variables discrétisées donne :

$$y_{-1} = y_0 = y_{N+1} = y_{N+2} = 0,$$

ce qui permet d'obtenir les relations :

- pour $i = 1$,

$$\Delta^4 f_1 = (\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_2)y_1 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)y_2 + \alpha_2 y_3;$$

- pour $i = 2$,

$$\Delta^4 f_2 = -2(\alpha_1 + \alpha_2)y_1 + (\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3)y_2 - 2(\alpha_2 + \alpha_3)y_3 + \alpha_3 y_4;$$

- pour $i = 3$ à $N-2$,

$$\begin{aligned}\Delta^4 f_i \ =\ & \alpha_{i-1}y_{i-2} - 2(\alpha_{i-1}+\alpha_i)y_{i-1} + (\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1})y_i \\ & -2(\alpha_i + \alpha_{i+1})y_{i+1} + \alpha_{i+1}y_{i+2};\end{aligned}$$

- pour $i = N-1$,

$$\begin{aligned}\Delta^4 f_{N-1} \ =\ & \alpha_{N-2}y_{N-3} - 2(\alpha_{N-2} + \alpha_{N-1})y_{N-2} \\ & +(\alpha_{N-2} + 4\alpha_{N-1} + \alpha_N)y_{N-1} - 2(\alpha_{N-1} + \alpha_N)y_N;\end{aligned}$$