Avant-propos

Tapez « graphe » (sans autre précision) sur Internet dans votre moteur de recherche préféré. Il va trouver aussitôt entre 600 000 et 1 200 000 sites à consulter ! De quoi meubler de longues soirées d'hiver.

De tous ces sites, nous pouvons tout de suite éliminer ceux qui ne concernent pas le sujet de cet ouvrage. Pour beaucoup, « graphe » est synonyme de « représentation graphique » (ou « courbe représentative ») d'une fonction. Or les deux choses n'ont rien à voir. Mais comment les éliminer sans les avoir consultés ?

Il faudrait ensuite faire disparaître des sites sélectionnés et qui concernent réellement les graphes qui nous intéressent ceux qui sont destinés aux spécialistes de haut niveau.

Cet ouvrage volontairement modeste a pour but de faire connaître le « b-a-ba » de la théorie, de débroussailler un peu le terrain pour permettre ensuite à ceux que le sujet intéresse d'aborder des rivages plus délicats, en allant éventuellement sur les sites indiqués dans la dernière partie (compléments).

Il est en effet conçu pour être utilisé par tous ceux qui veulent s'*initier* à la théorie des graphes.

Il ne prétend pas aborder *toute* la théorie, toutes ses applications. Et puisqu'il fallait donc fixer des « limites », il se conforme *grosso modo* au programme actuel de terminale ES (fixé en 2002) – spécialité maths (à titre d'information, ce programme est donné plus loin dans les compléments).

Il ne prétend pas non plus dans les chapitres étudiés couvrir de façon exhaustive les exercices.

Il aborde cette théorie de façon simple, comme elle est abordée en classe. Les novices peuvent donc le feuilleter, le lire sans crainte de se trouver perdus. Sans avoir de culture mathématique particulière, en tout cas jusqu'au chapitre 4 à partir duquel quelques connaissances sur les matrices puis, plus loin, sur les probabilités et les suites sont nécessaires.

Il va dans certains cas un peu plus loin que le programme de terminale. Les points qui ne sont pas étudiés dans cette classe mais sont toutefois abordés ici sont signalés de façon que ceux qui seront désireux d'utiliser ce manuel avec leurs élèves sachent jusqu'où ils peuvent « aller trop loin ».

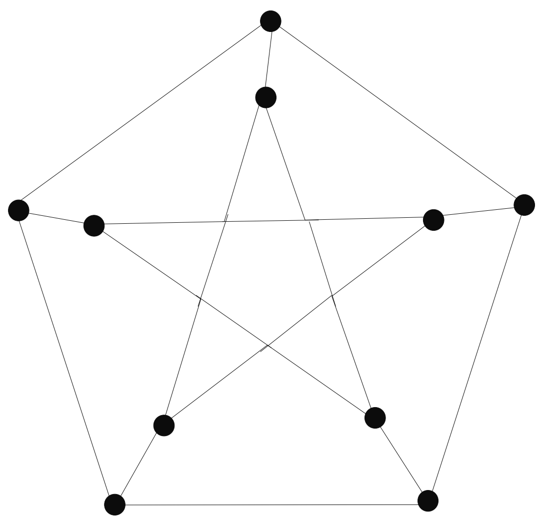
La théorie est complétée par des paragraphes « pratiques » (utilisation de logiciels), historiques (concernant les mathématiciens cités) et autres, y compris des adresses de sites Internet où des compléments, des prolongements pourront être trouvés, comme il est dit plus haut, ainsi que des types d'exercices non étudiés ici.

Afin de préparer les élèves de terminale ES au baccalauréat – ce qui est une utilisation possible de cet ouvrage sans en constituer le but principal –, dès le deuxième chapitre, des sujets sur les graphes donnés à cet examen seront proposés.

Et pour permettre aussi à tous de bien comprendre les notions étudiées, chaque chapitre contient des exercices corrigés – présentés sous forme de « pauses »– et des exemples détaillés qui sont autant d'exercices.

Les « pauses » sont placées à l'intérieur du chapitre pour contrôler au fur et à mesure de la progression l'acquisition des connaissances, ce qui permet d'une part de ne pas continuer l'étude tant que les notions précédentes n'ont pas été assimilées, d'autre part de ne pas avoir à contrôler en une fois l'acquisition d'un très grand nombre de sujets – tous ceux abordés dans le chapitre –, ce qui serait le cas si l'on attendait la fin de celui-ci pour proposer ce genre d'exercice.

Enfin, l'introduction donne des exemples de problèmes – plus ou moins concrets – qui peuvent être résolus par les graphes et montrent donc une utilisation possible de ces objets mathématiques souvent méconnus.



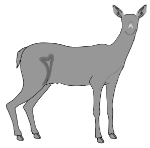
Graphe de Petersen
(*voir chapitres 1, 2 et 3*)

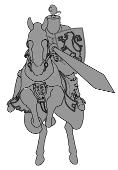
Introduction

Pourquoi la théorie des graphes ?

Les six exemples ci-dessous montrent des problèmes – sous une forme simplifiée, et uniquement des problèmes que l'on peut aborder en Terminale ES – que cette théorie permet de résoudre.
Les réponses seront apportées dans les chapitres désignés entre parenthèses.

Premier exemple (chapitre 1)





Le loup, la biche et le chevalier veulent traverser une rivière. Un passeur leur propose de les aider mais il ne peut faire traverser qu'une personne à la fois. Or le loup et la biche ne doivent jamais rester seuls ensemble pour des raisons évidentes, pas plus que le loup et le chevalier, sous peine de carnage. Comment procéder ?

Deuxième exemple (chapitre 3)

Plusieurs intermittents du spectacle sont convoqués pour participer au tournage de sept films, que l'on désigne par les lettres A, B, C, D, E, F et G.
Ils doivent participer aux films selon les données du tableau ci-dessous :

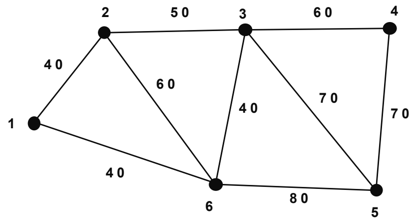
	A	B	C	D	E	F	G
Figurant	Jean	Luc	Luc	Jean	Max	Léon	Jean
Figurante	Anne	Anne	Lio	Anne	Lio	Bea	Lio
Preneur de son	Louis	Louis	Jo	Théo	Jo	Louis	Louis
Cadreur	Greg	Marc	Greg	Marc	Stef	Stef	Stef
Scripte	Isa	Marie	Marie	Isa	Ada	Ada	Marie

Tous doivent absolument participer aux films pour lesquels ils sont convoqués. Une journée de tournage coûtant très cher, il faut si possible tourner plusieurs films en même temps et en un minimum de jours.

Quelle solution pouvez-vous proposer ? Autrement dit, quels films pourra-t-on tourner en même temps (*en parallèle*) pour gagner du temps – et de l'argent ?

Troisième exemple (chapitres 2 et 5)

Un voyagiste organise des circuits (au sens *touristique* du terme) parmi les châteaux de la Loire.
Six châteaux peuvent être visités, représentés ci-dessous par des points numérotés.
Les routes qu'empruntent les cars correspondent aux segments tracés entre ces points et la distance entre les villes est notée sur chaque segment, en kilomètres.

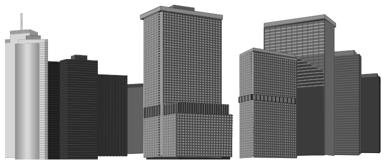


Les circuits doivent durer cinq jours (du lundi au vendredi inclus), commencer au château n°1 et finir au château n°4. Entre ces deux châteaux, il y a donc trois châteaux différents à visiter (un château par jour et une fois et une seule chacun, bien entendu !).
Y a-t'il plusieurs circuits possibles ?

Et si, pour des raisons économiques (faire réaliser des économies au voyagiste et éventuellement faire baisser le prix pour le voyageur) on souhaite trouver le circuit le plus court en kilomètres (s'il en existe un seul), pouvez-vous donner une réponse ?

Quatrième exemple (chapitre 6)

Chaque année, des habitants des grandes villes partent s'installer à la campagne, pour y trouver le calme, s'éloigner de la pollution et parfois pour changer de métier, se convertir et se tourner vers d'autres activités.



De la même façon, des habitants de la campagne sont parfois obligés de se rapprocher des grandes villes pour par exemple trouver du travail.
Imaginons un pays, une région, où ces échanges se font à taux constants. Par exemple :
● Chaque année, 30% des habitants de la ville partent à la campagne (et donc 70% restent en ville).
● Chaque année, 20% des "campagnards" vont s'installer en ville (et par conséquent 80% restent à la campagne).
Que peut-on prévoir pour la situation de la ville et de la campagne à plus ou moins long terme ? La ville va-t-elle se transformer en mégapole ? La campagne va-t-elle se désertifier ? Ou va-t-il se créer un équilibre entre les deux ?

Cinquième exemple (chapitre 6)

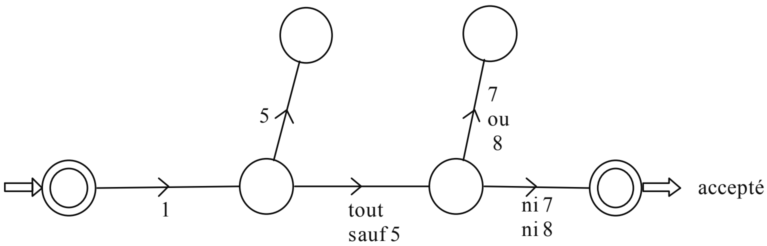
Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

Quel peut être l'état de l'individu au bout de trois mois pour chacune des situations de départ suivantes :
- il est immunisé,
- il est non malade et non immunisé,
- il est malade.

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée à long terme ?

Sixième exemple (chapitre 7)

A l'entrée d'un immeuble, un digicode est piloté par l'automate suivant.
Si l'on tape 153, la porte s'ouvrira-t-elle ? Et avec 146 ?



La théorie des graphes permet d'aborder bien d'autres problèmes concrets qui ne peuvent être étudiés en TES car le programme de cette classe est nécessairement limité et les techniques qui permettent de les résoudre dépassent parfois le niveau de terminale. De plus leur intérêt n'est souvent évident que dans les études supérieures (entre autres dans les études de gestion qui constituent un des nombreux débouchés pour les élèves de TES mais aussi théorie des jeux, sociologie, informatique, électronique…).

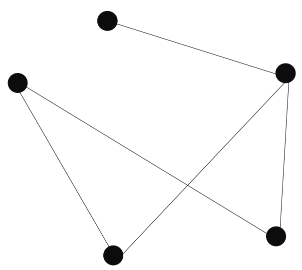
Dans cet ouvrage, qui se veut un ouvrage d'initiation, de tels problèmes ne seront pas abordés.

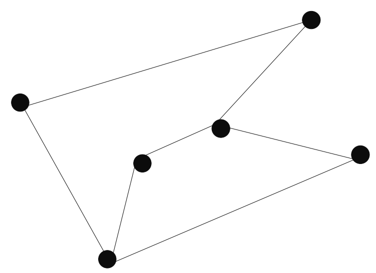
Chapitre 1

Définitions - Généralités

1.1 Premières définitions

Un **graphe** est un ensemble de points reliés par des segments, comme sur les figures ci-dessous :

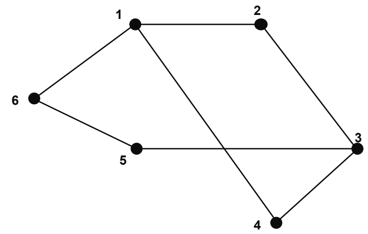


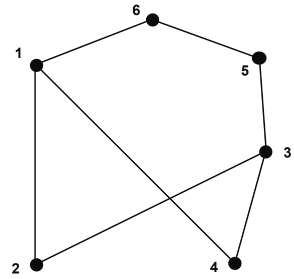


Les points sont appelés **sommets** ou **nœuds** du graphe.
Les segments en sont les **arêtes**. Les sommets situés « à chaque bout » sont alors les **extrémités** de l'arête.

REMARQUES

● La position des sommets et des arêtes n'a pas d'importance. Ainsi les deux graphes ci-dessous sont équivalents (*les sommets ont été numérotés pour que les choses soient plus claires*) :





On peut rassembler les données du graphe dans un tableau tel que celui ci-dessous, où les « 1 » indiquent la présence d'une arête reliant les sommets dont les numéros figurent au début de chaque ligne et en haut de chaque colonne. Les « 0 » indiquent bien sûr l'absence d'arête.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	1	1	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1
6	1	0	0	0	1	0

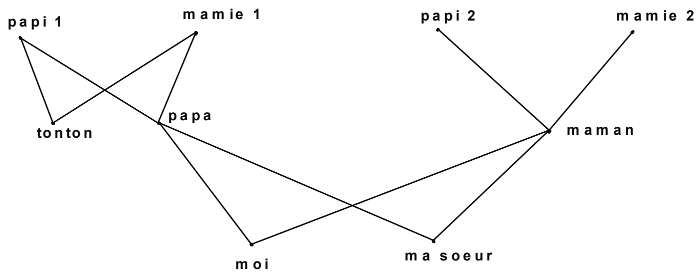
Si nous associons à chacun des graphes ci-dessus un tel tableau, nous verrons que les deux tableaux obtenus sont rigoureusement identiques, à condition bien sûr de respecter le même ordre en tête de ligne et de colonne. En cas de doute sur l'équivalence de deux graphes, on pourra dresser ce tableau pour chaque graphe et comparer les résultats. C'est un moyen plus sûr que de se fier uniquement à l'aspect visuel.

● Nous reviendrons sur ces tableaux dans le chapitre 4. Ils revêtiront alors une certaine importance, pour ne pas dire une importance certaine, sous la forme de matrices.

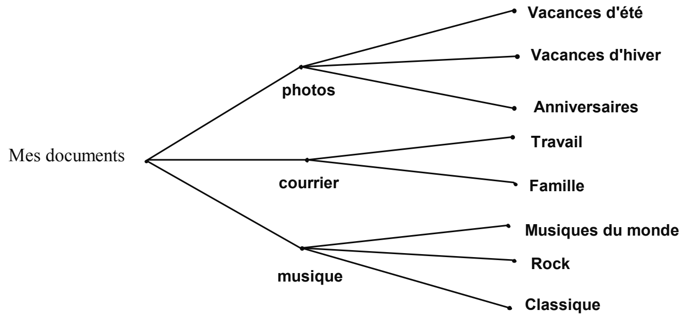
1.2 Des exemples concrets

On peut retrouver des exemples concrets de graphes partout dans la vie quotidienne : réseau routier, organigramme d'une entreprise, arbre généalogique, organisation des menus dans un ordinateur...
Les sommets portent alors en général des noms. Les points sont remplacés par du texte (*mots, symboles,…*).

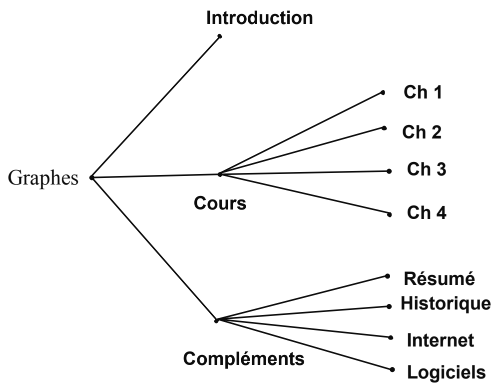
Arbre généalogique

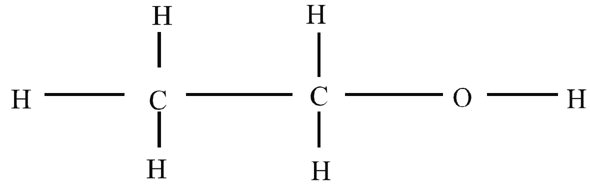


Un exemple d'organisation du répertoire « *mes documents* » dans un ordinateur.

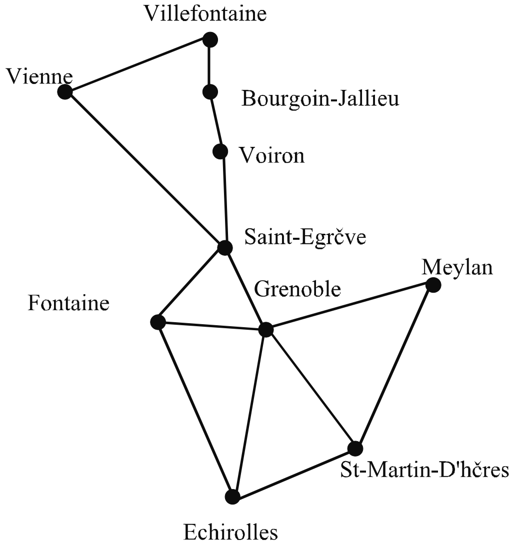


Le *sommaire* de ce livre peut lui-même être représenté sous forme de graphe. En voici une partie :





Molécule d’éthanol



Les *villes de l’Isère* de plus de 15 000 habitants autour de Grenoble et une partie du réseau routier.

Ces graphes ne sont que de simples images, de simples représentations. Pourquoi alors toute une théorie mathématique sur le sujet ? Parce que les graphes peuvent être utilisés pour résoudre de nombreux problèmes, de nature variée, comme cela a été indiqué en introduction et comme nous le verrons plus loin, dans les chapitres suivants.[1]

1.3 Ordre, degré

On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets.
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.
Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.

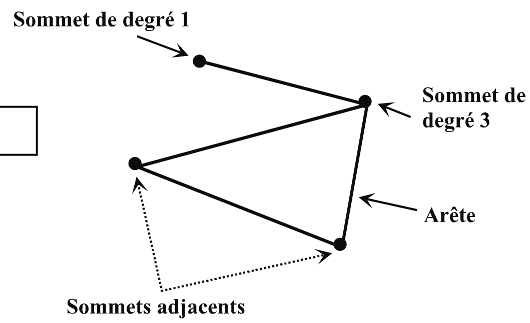
[1] Un « dessin » (au sens large) permet de traduire un texte en image. Ainsi en-est-il :
> des figures de géométrie
> des camemberts et histogrammes en statistiques
> des représentations graphiques de fonctions en analyse
> des arbres en calcul de probabilités
Mais ces « dessins » ne prennent tout leur sens que lorsqu’ils constituent des aides, voire des outils indispensables, à la résolution de problèmes.

PROPRIETE : la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.
Dans le graphe qui suit, par exemple, il y a :

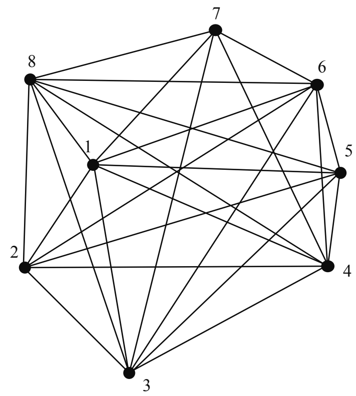
Quatre arêtes
Un sommet de degré 3
Deux sommets de degré 2
Un sommet de degré 1

La somme des degrés est donc égale à $3 + 2\times2 + 1 = 8$.
C'est donc bien le double du nombre d'arêtes.
JUSTIFICATION : à chaque arête correspondent deux sommets (un "à chaque bout" de l'arête).

Graphe d'ordre 4



Une application : combien le graphe ci-contre comporte-t-il d'arêtes ?
Il serait difficile de les dénombrer sans risquer d'en oublier ou d'en compter certaines deux fois. Additionnons plutôt les degrés de tous les sommets. Nous obtenons dans l'ordre numérique des sommets :
7+6+7+7+6+7+5+7 = 52
Il y a donc 26 arêtes.



Première pause

Avez-vous compris et assimilé ce qui précède ? Pour le savoir, répondez aux questions suivantes – si vous le pouvez !
Les réponses sont à la fin du chapitre.

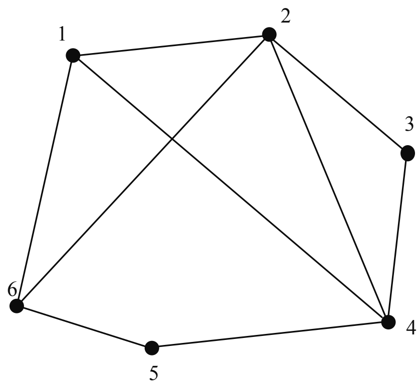
1°) Quel est l'ordre du graphe ci-contre ?

2°) Quel est le degré du sommet 1 ? Du sommet 4 ?

3°) Quels sont les sommets adjacents au sommet 2 ?

Au sommet 6 ?

4°) Il y a deux sommets adjacents chacun à quatre autres sommets. Lesquels ?



1.4 Chaîne, cycle

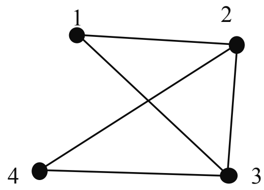
Une **chaîne** est une suite quelconque d'arêtes, donc de sommets adjacents.
La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qu'elle comporte.

EXEMPLE

Sur le graphe ci-contre, 1 – 2 – 3 est une chaîne de longueur 2.

1 – 3 – 4 – 2 est une chaîne de longueur 3.

Aucune chaîne ne peut comporter « 1 – 4 » ou « 4 – 1 » car il n'y a pas d'arête entre 1 et 4. Donc 2 – 3 – 4 – 1, par exemple, n'a aucun sens, n'existe pas.



Un **cycle** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues (on pourra donc dire qu'il a une seule extrémité), à condition que toutes les arêtes soient différentes. Mais un cycle peut comporter plusieurs fois le même sommet.
Si les arêtes ne sont pas toutes distinctes, on parlera simplement de « **chaîne fermée** ».

EXEMPLE

Sur le graphe ci-contre, 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 1 est un cycle.
De même que 3 – 1 – 5 – 4 – 3.

Mais 3 – 1 – 5 – 4 – 1 – 3 est une chaîne fermée (on parcourt deux fois l'arête qui relie les sommets 1 et 3).
De même que 2 – 3 – 1 – 4 – 3 – 2.