# 1

# LES ENTIERS

***Plan du chapitre***

1. *Les entiers naturels ; ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$**
2. *Somme et différence d'entiers*
3. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs*
4. *Complément sur les ensembles de nombres*

***Contenu et objectifs***

A l'origine, la construction des entiers répond à deux besoins :

- ✓ Numéroter, ordonner, les éléments d'un même ensemble (entiers ordinaux).
- ✓ Compter la quantité d'objets d'une collection (entiers cardinaux).

Ce chapitre traite des opérations de base que sont addition et soustraction ; leurs propriétés seront prolongées aux autres ensembles de nombres construits selon les nécessités :

$\mathbb{Z}$ Ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs).

$\mathbb{Q}$ Les rationnels (rapports d'entiers) répondent à la nécessité de fractionner les entiers pour affiner les mesures.

$\mathbb{R}$ Les réels complètent les rationnels en apportant la continuité entre les nombres.

$\mathbb{C}$ Les complexes, apparus pour la résolution des équations algébriques, sont devenus incontournables pour bien d'autres domaines.

## 1. *Les entiers naturels ; ensembles ℕ et ℕ**

### *1 Compter, numéroter*

Un, deux, trois, …
Pour compter le nombre de billes de son sac, l'enfant apprend à débuter par un premier nombre, le "un", qui lui ouvre une suite illimitée d'autres nombres ; il comprend ensuite que le comptage s'applique à n'importe quelle autre collection d'objets de même nature.

Cette suite de nombres {1, 2, 3, …} constitue l'ensemble ℕ* (*lire "N étoile")* des entiers strictement positifs :

• • • • • • •
1 2 3 4 ...

Étape décisive dans l'histoire des mathématiques, l'introduction du zéro[1] pour marquer l'absence d'objet dans une collection, nous donne pour cadre l'ensemble ℕ des ***entiers naturels***.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

<u>*Les axiomes de* P*EANO*[2]</u>

Compter des objets remonte très loin dans l'histoire de l'humanité : ce n'est qu'à la fin du XIX^e siècle que PEANO fixe les propriétés des entiers naturels à partir d'***axiomes*** constituant la base de l'arithmétique.
Un axiome est une propriété admise sans démonstration.

| | |
|---|---|
| 1^er axiome - | Tout entier naturel a un successeur et un seul. |
| 2^e axiome - | Deux entiers distincts ne peuvent avoir même successeur. |
| 3^e axiome - | Tout entier, autre que zéro, a un précédent. |
| 4^e axiome - | *Axiome de récurrence* (*voir chapitre 15*)<br>Si une propriété portant sur des entiers est vraie de 0 et si on prouve qu'étant vraie d'un entier $n$, elle reste vraie du successeur, alors elle est vraie pour tous les entiers. |

Schéma illustrant les trois premiers axiomes de l'ensemble ℕ.

0 1 2 3 *...ainsi de suite sans fin*

Les points représentent les entiers, les flèches le lien de succession.

---

[1] Le zéro n'est apparu en Europe qu'au XII^e siècle.
[2] Guiseppe PEANO (1858-1932) : logicien et mathématicien italien né à Cuneo.

*Exercice 1*

On considère l'ensemble $S$ des noms de jour de la semaine :
$S$ = {lundi, mardi, mercredi, jeudi vendredi, samedi, dimanche}.

1°) En remplaçant "entier" par "jour" dans les trois premiers axiomes de PEANO, étudier lesquels seraient applicables à l'ensemble $S$.

2°) Illustrer $S$ par un schéma exprimant les liaisons entre ses éléments.

*Nombres cardinaux et nombres ordinaux*

Les entiers permettent aussi bien le comptage d'une quantité d'objets que le numérotage de chaque élément de la collection.

> Le ***cardinal*** d'un ensemble est un entier indiquant la ***quantité*** d'éléments contenue dans cet ensemble.
>
> Un ***entier ordinal*** ordonne l'ensemble en numérotant chaque élément. **(1)**

*Exemple*

"Mars est un mois comptant 31 jours"
31 est un ***cardinal*** indiquant le nombre de jours de mars.

"Nous sommes le 17 mars"
17 est un ***ordinal*** indiquant qu'aujourd'hui est le $17^e$ jour de mars.

*Exercice 2*

Un tournoi de tennis comporte 50 joueurs.
Après le premier tour éliminant18 joueurs, il reste 32 joueurs qualifiés pour les seizièmes de finale ; suivent les huitièmes, les quarts, les demis et la finale qui désigne le vainqueur du tournoi ; il n'y a aucun match nul.
1°) Combien de matches comporte le tournoi ?
2°) Même question avec 763 concurrents et le même système qualificatif du tour préliminaire.

## 2 Comparaison des entiers

Entre deux entiers ***ordinaux*** $a$ et $b$, $a$ est dit "supérieur à $b$" s'il vient après $b$ dans l'énumération ($b$ est alors inférieur à $a$).

$a$ ***supérieur*** à $b$ s'écrit $a > b$
$b$ ***inférieur*** à $a$ s'écrit $b < a$

Soient $a$ et $b$ des entiers ***cardinaux***, $a$ étant le nombre d'enfants d'un groupe et $b$ le nombre de billes d'un sac.
On souhaite distribuer une bille à chaque enfant ; trois cas sont possibles.

- $a$ et $b$ sont égaux ; $a = b$.
  Chaque enfant a une bille et il ne reste plus de bille dans le sac.
- $a$ est inférieur à $b$ ; $a < b$

Chaque enfant a une bille mais il reste au moins une bille.

- $a$ est supérieur à $b$ ; $a > b$

  Il ne reste plus de bille mais au moins un enfant n'a pas de bille.

On démontre que ces deux façons de comparer sont équivalentes.

## 2. *Somme et différence d'entiers*

### *1 Somme d'entiers et l'opération d'addition*

Soient $A$ et $B$ deux ensembles d'objets de même nature de cardinaux respectifs $a$ et $b$ ; la ***somme*** $S$ de $a$ et $b$ est le nombre d'objets obtenu par la réunion des deux ensembles.
L'opération entre $a$ et $b$ donnant $s$ est l'***addition*** (+).
On note : $S = a + b$

*Propriétés de l'addition*

| | | |
|---|---|---|
| L'addition est ***commutative*** : | $a + b = b + a$ | **(2)** |
| L'addition est ***associative*** : | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | **(3)** |

*Justificatifs des propriétés*

La commutativité exprime simplement que réunir un ensemble $A$ avec un ensemble $B$ équivaut à réunir $B$ avec $A$.

L'associativité exprime l'équivalence entre les différentes façons d'opérer :
La réunion de trois ensembles $A$, $B$ et $C$ est aussi bien :

- réunir $A$ et $B$, puis cet ensemble avec $C$.
- réunir $A$ à la réunion préalable de $B$ et $C$.

Ces deux propriétés s'étendent sans difficultés à un nombre quelconque de termes à additionner ; les parenthèses sont ici inutiles puisque l'ordre choisi pour opérer les réunions n'a pas d'effet sur la somme à calculer.
La somme des cardinaux de cinq collections, s'écrit sans ambiguïté :

$$S = a + b + c + d + e$$

*Exercice 3*

$a$, $b$ et $c$ sont trois entiers de $\mathbb{N}$ tels que :

$a \geq b \geq c$ et $a + b + c = 7$

Combien de possibilités a-t-on pour satisfaire ces deux conditions ?

## 2 *Différence de deux entiers et l'opération soustraction*

> Étant donné un entier $a$ supérieur ou égal à $b$, la différence entre $a$ et $b$ est l'entier $D$ à ajouter à $b$ pour obtenir $a$ :
>
> $$a = b + D$$
>
> La différence s'écrit en introduisant l'opération de ***soustraction*** :
>
> $$D = a - b \qquad \textbf{(4)}$$

*Remarque*

Dans $\mathbb{N}$, la soustraction $(a - b)$ suppose $b$ inférieur ou égal à $a$.

*Exercice 4*

Soient $a$ et $b$ deux entiers de $\mathbb{N}$ tels que : $a \leq 37$ et $a - b = 14$
Combien y a-t-il de couples $(a, b)$ possibles ?

*Propriétés de la différence*

Ajoutons aux deux membres de l'égalité $a = b + D$, un nombre $c$ :

$$a + c = (b + D) + c$$

Associativité et commutativité de l'addition, permettent d'écrire :

$$a + c = (b + c) + D$$

L'ajout ou le retrait du même nombre à $a$ et $b$ ne change pas leur différence.

> La différence de deux nombres ne change pas si l'on ajoute ou retranche un même nombre à chacun d'eux. **(5)**

## 3 *Les polynômes arithmétiques*

Un ***polynôme arithmétique*** est une expression combinant sommes et différences ; on obtient d'autres identités comparables aux précédentes :

Retrancher une somme d'un nombre : $a - (b + c) = a - b - c$

Retrancher une différence d'un nombre : $a - (b - c) = a - b + c$

Ajouter une différence à un nombre : $a + (b - c) = a + b - c$

De ces identités, apparaît une règle générale permettant la suppression des parenthèses dans un polynôme :

> Dans un polynôme contenant des expressions entre parenthèses, on peut supprimer les parenthèses sans modifier la valeur du polynôme :
>
> - à condition de ***conserver*** le signe de chaque terme si les parenthèses sont précédées du signe additif "+",
> - à condition de ***changer*** le signe de chaque terme si les parenthèses sont précédées du signe soustractif "-". **(6)**

*Exemples*

Ces deux exemples illustrent l'utilisation des propriétés précédentes et non le calcul lui-même, faisable mentalement.

1°) Calculons : $A = 8 + 5 - 11 - (5 - 6 - 3) + (3 - 7)$

Dans les parenthèses, les soustractions n'étant pas toutes possibles dans $\mathbb{N}$, commençons par supprimer les parenthèses :

$$A = 8 + 5 - 11 - 5 + 6 + 3 + 3 - 7$$

Groupons les termes à additionner en tête :

$$A = 8 + 5 + 6 + 3 + 3 - 11 - 5 - 7$$

Groupons les termes à soustraire entre parenthèses :

$$A = 8 + 5 + 6 + 3 + 3 - (11 + 5 + 7) = 25 - 23 = 2$$

2°) Calculer : $B = 12 - \big(5 - [8 - (11 + 10 - 6)]\big)$

Supprimons les parenthèses en débutant par les plus profondes :

$$B = 12 - \big(5 - [8 - 11 - 10 + 6]\big)$$

Puis : $B = 12 - \big(5 - 8 + 11 + 10 - 6\big)$

Enfin : $B = 12 - 5 + 8 - 11 - 10 + 6$

Groupons séparément les termes à additionner et ceux à soustraire :

$$B = (12 + 8 + 6) - (5 + 11 + 10) = 26 - 26 = 0$$

*Exercice 5*

Calculer : $A = 52 - (3 + 7 - 6) + (4 - 9)$

Simplifier : $B = a - \big(b - [c - (a + c - b)]\big)$

## 3. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs*

Dans un grand nombre d'applications, il est nécessaire de pouvoir exprimer la différence $(a - b)$ même si $b$ est supérieur à $a$ d'où la nécessité d'adjoindre à chaque entier positif un entier négatif, nommé son ***opposé***.
Cette construction est due à Nicolas CHUQUET[1] vers la fin du XV[e] siècle.

> Deux entiers relatifs sont dits ***opposés*** s'ils sont de signe contraire et de même valeur absolue.
>
> *Exemples :* $+3$ a pour opposé $-3$
> $-8$ a pour opposé $+8$
>
> *Nota :* 0 est l'opposé de 0.

[1] Nicolas CHUQUET (1445-1500) : mathématicien français dont les travaux portent sur les nombres et surtout sur l'algèbre.

*<u>Représentation des entiers relatifs (ensemble $\mathbb{Z}$)</u>*

$$\ldots -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2$$

L'opposé de l'entier relatif $a$ est noté $-a$ que $a$ soit positif ou négatif.
(*Voir commentaire ci-dessous sur l'emploi du signe "−"*).

*<u>Addition et soustraction dans $\mathbb{Z}$</u>*

Les règles opératoires sont simples ; $a$ et $b$ étant deux entiers relatifs de signe quelconque :

> Soustraire $b$ de $a$ équivaut à ajouter $(-b)$ à $a$ :
> $$a - b = a + (-b) \qquad \textbf{(7)}$$
> Ajouter $b$ à $a$ équivaut à soustraire $(-b)$ de $a$ :
> $$a + b = a - (-b) \qquad \textbf{(8)}$$

Les règles (5) et (6) sont inchangées.

*<u>Commentaires</u>*

- Les deux premiers axiomes de PEANO restent valables, le 3$^{e}$ devient :
  "Tout entier relatif a un précédent"
- Le signe "moins" (−) en mathématiques a trois significations qu'il est nécessaire de bien distinguer :
  - ❖ Le signe "−" précédant un nombre de $\mathbb{Z}$ indique que celui-ci est négatif. Cela permet la distinction entre $(-4)$ et $(+4)$, par exemple.
    Un nombre précédé d'aucun signe est positif.
  - ❖ C'est aussi le signe de soustraction entre nombres :
    Entre deux positifs : $(+30) - (+5) = 25$
    Entre un positif et un négatif : $(+30) - (-5) = 35$.
  - ❖ Enfin le signe moins dans "$-a$", indique l'opposé de $a$ :
    $$\{\text{Si } a = +6 \text{ alors } -a = -6\}$$
    $$\{\text{Si } a = -6 \text{ alors } -a = +6\}$$

*<u>Exercice 6</u>*

1°) Sur mon compte bancaire, les crédits sont marqués d'un signe "+" et les débits d'un signe "−".
Donner pour chacune des 5 opérations suivantes sa valeur algébrique.

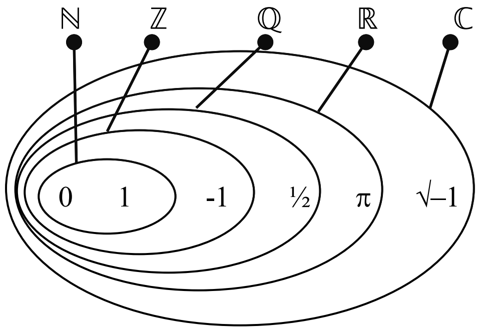
- 30/03 - Frais bancaires de 115 €.
- 2/04 - Crédit de 200 €.
- 5/04 - Prélèvement EDF de 127 €.
- 5/04 - Achat d'une imprimante valant 315 €.
- 8/04 - Virement de 26 € par l'assurance maladie.

2°) A la date du 3 avril le solde était créditeur de 467 €.
La banque a ensuite procédé à deux corrections :
10 avril : compensation des frais bancaires du 30/03 indûment prélevés.
13 avril : retrait du crédit du 2/04 viré par erreur sur mon compte.
Écrire la suite d'additions et soustractions à effectuer sur les valeurs algébriques précédentes pour calculer mon solde au 14 avril.

## 4. *Complément sur les ensembles de nombres*

Cette partie décrit, succinctement, les principales structures de nombres apparus au cours de l'histoire des mathématiques face aux nouveaux besoins.

Cette construction est basée sur l'ensemble ℕ des entiers naturels, chaque nouvelle extension englobant les précédentes:




ℤ : ensemble des entiers relatifs ou algébriques (positifs et négatifs),

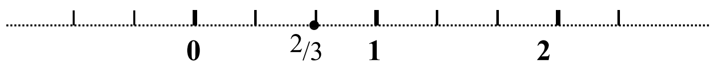
ℚ : ensemble des nombres rationnels, rapports entre entiers,

ℝ : ensemble des réels introduisant la continuité entre les nombres,

ℂ : les nombres complexes apparus à propos de la résolution des équations algébriques.

*L'ensemble ℚ des nombres rationnels*

Les nombres rationnels comprennent les entiers de ℤ et les ***fractions*** (*chapitre 10*), rapports entre deux entiers.
Un nombre rationnel est ainsi associé à toutes les fractions égales entre elles : par exemple, $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ représentent le même rationnel représenté par un point sur un axe portant tous les rationnels.




Les décimaux (*chapitre 12*) étant des fractions particulières sont aussi des