

# Chapitre 1

## La verticale et l'horizontale

L'être humain adulte a une intuition claire de ce que sont les lignes droites, les surfaces planes, l'horizontale et la verticale, les parallèles, les angles et les perpendiculaires. Il reconnaît les objets symétriques. Ces connaissances lui viennent sans doute moins d'un apprentissage scolaire que du fait d'avoir vécu et surtout agi dans un environnement qui les lui impose. On ne peut échapper à ces notions. Elles sont d'abord intuitives et pratiques, et non scientifiques. Les droites par exemple ont une existence matérielle : ce sont des poteaux, des routes sans virages, des tiges, des fils tendus, les bords d'une table, . . . Elles ne sont pas ces objets idéalisés, non bornés, infiniment fins, constitutifs de la géométrie théorique. Dans ce chapitre, nous n'avons pas encore besoin de savoir, par exemple, que lorsque deux droites se coupent, elles ont en commun un point et un seul, ou que par deux points passe une droite et une seule.

Notre objectif est d'introduire la géométrie en nous appuyant sur le sens commun. Nous ne définissons donc pas formellement les concepts de point, droite, plan, parallèle, angle et perpendiculaire. Au contraire, nous supposons ces notions familières sur les plans intuitif et pratique, et cherchons dans notre environnement quotidien les lieux et les circonstances où elles apparaissent le plus clairement. Ceci nous amène à privilégier dans un premier temps les directions horizontale et verticale. Nous mettons en évidence certaines propriétés de parallélisme et de perpendicularité des droites et des plans, ainsi que les orientations naturelles de certaines droites, comme par exemple le haut et le bas pour les verticales. Nous nous attardons sur la gauche et la droite. Nous étudions aussi les trajets d'une personne qui, comme cela se passe en ville, avance en ligne droite, puis change de direction, poursuit en ligne droite, change à nouveau de direction, etc.

Insistons sur le fait que ce chapitre s'appuie sans réserve sur les directions physiques que sont la verticale et l'horizontale, mais aussi, on le verra, sur la symétrie du corps humain et de ses organes sensoriels. Nous terminons néanmoins par la découverte de droites et de plans en position quelconque, c'est-à-dire sans relation particulière avec l'horizontale et la verticale ou le corps humain.

## 1.1 Droites et plans verticaux

Pourquoi y a-t-il tant de droites et de plans verticaux autour de nous ?

Tout d'abord, il est vrai que les droites et les plans verticaux abondent dans notre environnement : les poteaux, les pylônes et les tours sont verticaux, de même que les câbles de suspension des lustres, ainsi que la plupart des troncs d'arbre et beaucoup de tiges de plantes. Les murs et les palissades sont, pour la plupart, plans et verticaux. Tous ces objets sont verticaux à cause de la force de pesanteur. De quoi s'agit-il ?

Tout objet est attiré vers le bas par cette force, qui est virtuellement présente même là où on ne la perçoit pas. Il suffit de transporter un objet quelconque, une pierre par exemple, en un endroit quelconque de l'espace, et on s'aperçoit qu'en cet endroit où il n'y avait rien avant, la pierre est soumise à une force : elle pèse sur la main. Cette force est un peu comme les ondes de radio qui sont présentes là où on ne les voit pas. Il suffit de transporter une radio en un point de l'espace et de tourner le bouton pour s'apercevoir qu'en ce point passent des émissions que l'appareil peut capter.

Une autre façon simple de mettre la pesanteur en évidence en un point donné consiste à y abandonner une pierre sans vitesse initiale : elle tombe verticalement. Mais son mouvement est éphémère, car elle s'arrête au sol. Un fil à plomb, par contre, manifeste la force de pesanteur de façon durable.

Les hommes bâtissent verticalement pour assurer la stabilité de leurs constructions. Une tour ou un mur penchés tombent ou risquent de tomber. Il est sans doute difficile de prêter des intentions à la nature, mais le fait est que la situation verticale de leurs troncs assure aux arbres la meilleure stabilité possible. Quant aux branches des saules pleureurs et aux câbles de suspension des lustres, ils sont directement tirés vers le bas par la force de pesanteur.

Toutes les droites verticales sont parallèles : vrai ou faux ? Tous les plans verticaux sont parallèles : vrai ou faux ?

Mais oui, toutes les droites verticales sont parallèles. C'est un fait qu'il suffit de constater et qui est illustré par les sapins de la figure 1.1. Par contre il est faux que tous les plans verticaux soient parallèles. Certes, il existe des plans verticaux parallèles, comme par exemple les façades avant et arrière de la plupart des maisons, ou l'avant et l'arrière d'une garde-robe. Mais un mur de façade et un mur de pignon ne sont pas parallèles : ils se rencontrent. On dit aussi qu'ils sont *sécants*. Et l'on observe deux phénomènes importants : non seulement les deux plans se coupent suivant une droite, mais en outre celle-ci est verticale. Nous rencontrons ainsi une droite qui ne doit pas sa verticalité immédiatement à la force de pesanteur. En effet, la droite d'angle de la maison ne pèse rien. Elle est verticale parce qu'elle est l'intersection de deux plans verticaux.



FIG. 1.1

Si on va au fond des choses, toutes les droites verticales sont-elles vraiment parallèles ?

Mais non, car nous savons bien que la terre est ronde et que les verticales se rencontrent en son centre. Mais ce n'est pas là une vérité immédiate, c'est une donnée scientifique profonde, que l'humanité a mis des millénaires à découvrir. Or nous cherchons ici à reconstruire la géométrie à partir du sens commun. Et celui-ci nous dit que, *dans les limites de notre expérience première*, toutes les droites verticales sont parallèles. Toutes ces parallèles de notre environnement contribuent à nous imprégner de la notion de parallélisme.

Que ces droites ne soient pas parallèles, ou qu'elles ne le soient qu'approximativement, ne peut être un souci ou une objection *au départ*. Si erreur il y a, elle est nécessaire à la construction de la géométrie. Et lorsqu'en étudiant plus tard la géodésie (c'est-à-dire la forme et les mesures de la terre), on s'apercevra qu'il s'agissait d'une erreur, la géométrie aura pris son envol et la vérité sur la forme de la terre répondra au jugement de BACHELARD [1980] : «on connaît *contre* une connaissance antérieure.»

Les droites verticales sont-elles naturellement orientées ? On veut dire par là : peut-on y découvrir naturellement deux sens opposés ?

Il y a effectivement un sens sur les verticales, dû à ce que la force de pesanteur tire vers le bas et non vers le haut. Les pierres ne s'envolent pas, elles tombent. Le fil à plomb pend vers le sol, il ne se tend pas vers le ciel. Les deux locutions *en haut* et *en bas*, de même que *plus haut* et *plus bas*, *au-dessus* et *en dessous* manifestent le sens de la pesanteur.

L'être humain se tient debout, c'est-à-dire grosso modo verticalement, et il est naturellement orienté, car le plus souvent sa tête est en haut et ses pieds sont en bas. Il expérimente le sens de la pesanteur dès qu'il monte à la corde : monter est dur, redescendre c'est tout autre chose. . .

## 1.2 Plans et droites horizontaux

Il y a dans notre environnement beaucoup de plans horizontaux et de droites horizontales. Est-ce – ici aussi – la force de pesanteur qui est en cause ?

Il y a effectivement beaucoup de plans horizontaux autour de nous : par exemple les planchers des habitations et les plateaux des tables. Ces plans sont construits ou disposés horizontalement parce que, s'ils étaient penchés, tout objet posé dessus aurait tendance à glisser ou à rouler. Nous préférons retrouver les objets là où nous les avons déposés.

Mais les plaines, comme celles des Pays-Bas et de tant d'autres régions, sont aussi *grosso modo* des plans horizontaux. C'est que toute poussière ou tout roc qui se trouve sur une montagne a tendance à glisser ou rouler jusqu'au bas de celle-ci et toute proéminence au dessus d'une plaine a tendance à disparaître sous l'action de l'érosion et de la pesanteur. De même, la surface d'un étang ou d'un lac tranquille est un plan horizontal, car dès que cette surface est troublée, par exemple par un jet de pierre, l'eau qui monte au-dessus du niveau de la surface est bientôt ramenée vers le bas par la pesanteur et les creux qui apparaissent dans l'eau sont bientôt comblés.

La présence de nombreuses droites horizontales autour de nous est due le plus souvent à l'existence de plans horizontaux. Une route droite en plaine est horizontale parce que la plaine l'est. Les bords d'une table sont horizontaux parce que la table elle-même est horizontale. En fait, toute droite contenue dans un plan horizontal est horizontale.

Tous les plans horizontaux sont parallèles : vrai ou faux ? Toutes les droites horizontales sont parallèles : vrai ou faux ?



FIG. 1.2

Tous les plans horizontaux sont parallèles, comme on le constate aisément. Cette propriété est illustrée par les planches d'une étagère, ou encore par l'empilement d'étages du building de la figure 1.2.

Par contre, il n'est pas vrai que toutes les droites horizontales soient parallèles. Elles peuvent l'être, comme par exemple les rails d'un chemin de fer qui va tout droit en plaine, ou les bords opposés d'une table rectangulaire. Mais il y a deux autres situations possibles.

D'abord, deux droites horizontales peuvent se couper ou se rencontrer, comme le font deux sentiers rectilignes qui se croisent en plaine, ou deux bords voisins d'une table qui se rejoignent en un coin de celle-ci. De deux droites qui se coupent, on dit aussi qu'elles sont *sécantes*.

Mais deux droites horizontales peuvent aussi, si on peut dire, se croiser sans se toucher. Telle est le cas, par exemple, d'une voie de chemin de fer qui passe sur un viaduc au dessus d'une autre. C'est ce qu'illustre la figure 1.3. De deux droites qui se croisent ainsi sans se toucher, on dit qu'elles sont *gauches*. Cet adjectif évoque sans doute le sentiment que donnent de telles droites d'être «mal disposées».



FIG. 1.3

Comment se fait-il qu'il y ait tant d'angles droits autour de nous ?

Considérons des poteaux plantés au bord d'une route droite, en plaine : ils ne penchent d'aucun côté, ils sont verticaux. Ils forment donc avec le bord de la route deux angles égaux appelés *angles droits*.

Comme nous l'avons vu, nous sommes entourés de droites verticales et de droites horizontales. Or dès qu'une verticale rencontre une horizontale, elle fait un angle droit avec celle-ci. Tel est le cas des montants d'une porte et du seuil de celle-ci, ou des pieds d'une table (quand ils sont droits et verticaux) et des bords de la table. Tous ces angles droits sont verticaux. Mais il y a également

autour de nous beaucoup d'angles droits horizontaux. L'angle droit est un angle particulier qui a des vertus pratiques. Imagine-t-on par exemple, la difficulté de meubler une pièce d'habitation si les coins de celle-ci, de même que ceux des meubles, formaient des angles quelconques ?

Comment, avec un cahier, construire une droite verticale au dessus d'une table ?

Il suffit d'ouvrir le cahier en éventail et de le poser sur la table, comme le montre la figure 1.4. Le dos du cahier est alors une droite verticale qui rencontre la table en un point. Par ce point passent tous les côtés inférieurs des feuillets. Ils font chacun un angle droit avec la verticale.

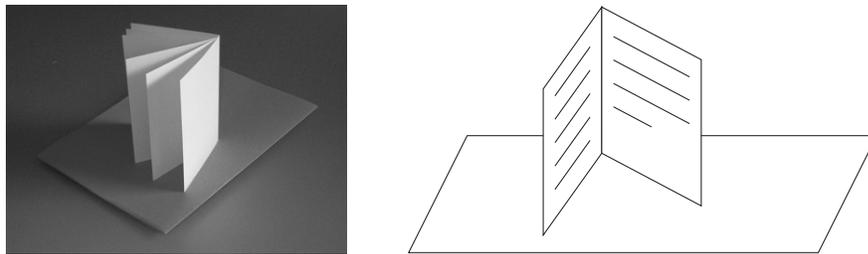


FIG. 1.4

On remarque par ailleurs que, pour construire une telle verticale, il suffit d'avoir un « cahier de deux pages » ou, pour assurer une plus grande rigidité, une feuille de carton rectangulaire pliée en deux. La figure 1.4 montre aussi cela.

Les droites horizontales sont-elles, comme les verticales, naturellement orientées ?

Nous l'avons vu, les droites verticales sont naturellement orientées. Ce n'est pas le cas des horizontales : une corde tendue à l'horizontale, une route droite ne sont pas orientées.

Il arrive pourtant qu'une droite horizontale soit naturellement orientée. Lorsqu'on fixe un point à l'horizon – c'est souvent un point vers lequel on se dirige –, la droite qui joint l'œil à ce point est horizontale. Sur cette droite, il y a des choses *devant* soi, celles vers lesquelles on regarde. Mais la droite s'étend aussi *derrière* soi, vers des choses qu'on ne voit pas. On peut *avancer* ou *reculer*, c'est-à-dire aller *vers l'avant* ou *l'arrière*. La droite horizontale en question est donc orientée mais pas, comme la verticale, par une loi physique universelle. Elle l'est par la position de l'être humain considéré. D'ailleurs, celui-ci peut se retourner, ce qui change l'arrière en avant et l'avant en arrière. De plus, si deux êtres humains se font face, l'espace entre eux est à l'avant de chacun, mais l'espace derrière chacun est devant pour l'autre, ce qui peut provoquer des quiproquos.

Alors que toutes les droites verticales sont parallèles et orientées de façon cohérente, il existe une multitude de droites horizontales qui peuvent être orientées dans un sens ou l'autre. Si des gymnastes debout au repos regardent dans des directions variées, et si on leur commande un pas en avant, chacun avance dans la direction de son regard. La commande «vers l'avant» a une signification particulière, propre à chacun d'eux. Si par contre on leur commande de sauter sur place, ils s'élèvent tous verticalement.

Ainsi, il y a autant d'avant et d'arrière qu'il y a d'êtres humains. Mais en outre, il y a un avant et un arrière pour chaque mammifère et même pour les fauteuils, les autos, etc. Et l'être humain apprend à discerner son avant et son arrière de ceux – éventuels – des autres êtres ou choses. Si un photographe dit à quelqu'un de se mettre «devant le cheval», le contexte devra indiquer s'il s'agit de l'avant du cheval ou de l'espace entre le photographe et l'animal.

Le sens de *arrière* – comme celui de *avant* – peut être détourné. Par exemple, un arbre n'a ni avant ni arrière. Si une personne dit à un enfant «cache-toi derrière l'arbre», l'enfant va se poster quelque part devant la personne, mais avec l'arbre interposé entre elle et lui.

Considérons un objet plan, par exemple une peinture. Quel est le meilleur point de vue pour le regarder ? Et le plus mauvais ?

Dans une galerie de peintures, les tableaux sont accrochés verticalement au mur et, pour bien voir l'un d'eux, le visiteur se place devant. Dans ces conditions, le tableau et le mur sont, par rapport à lui, en position dite *de front* ou *frontale*. Bien entendu, le visiteur se place en outre ni trop près, ni trop loin du tableau, de manière à le voir sous un angle approprié.

Autre exemple, pour quelqu'un qui est devant une maison et tourné vers elle, la façade est de front par rapport à lui. Par contre, si un observateur se trouve dans le plan de la façade, il ne la voit plus. Si on fait pivoter devant soi un carton plan, il existe des positions de celui-ci où on n'en voit plus que la tranche : il apparaît alors quasiment comme un simple trait.

De même, on peut tenir devant soi une «droite», comme par exemple une règle ou un crayon, de façon à n'en voir qu'un bout, quasiment un point. On dit alors que la droite est, par rapport à l'observateur, en position *de bout*.

### 1.3 La gauche et la droite

Nous avons vu que lorsqu'un être humain avance droit devant lui, son parcours en ligne droite est orienté par le sens de sa marche. Qu'en est-il alors de la direction horizontale perpendiculaire au parcours ? Comment s'élaborent la gauche et la droite ?

Pour un être humain debout se dirigeant droit devant lui en plaine, la verticale et la trajectoire horizontale de son mouvement forment un angle droit. Ces deux droites déterminent un plan vertical. Du point de vue de la personne

qui marche, les deux côtés de ce plan sont équivalents : il n'y a aucune raison que l'un se distingue de l'autre. Et comme le fait de se déplacer est essentiel pour l'être humain, là se trouve sans doute la raison profonde qui fait que son corps est aussi pareil des deux côtés. Il a deux bras, un de chaque côté. Il a aussi deux jambes, deux yeux, deux oreilles, disposés de part et d'autre. Il a un nez au milieu, et de même pour la bouche, le nombril. . . Bref, le corps humain est *symétrique*. Ce n'est pas tout à fait vrai, car le foie est d'un côté et le cœur de l'autre, mais cela se voit peu. Un visage humain n'est jamais tout à fait symétrique non plus, mais cela ne se remarque pas davantage. Comme nous allons le voir, le fait que ces défauts de symétrie ne sont pas apparents a de grandes conséquences.

Considérons donc à nouveau un être humain debout, le regard porté horizontalement vers l'avant et les bras étendus latéralement. Ses bras déterminent une droite horizontale de direction perpendiculaire à la droite de son regard. Rien ne distingue un bras de l'autre. Supposons maintenant que cet être humain soit le premier apparu sur la terre. C'est par une décision arbitraire qu'il *distingue ses deux bras* en appelant l'un le bras *gauche* et l'autre le bras *droit*. Au rebours, et comme nous l'avons vu, il n'a pas de peine à distinguer le haut et le bas, non plus que l'avant et l'arrière.

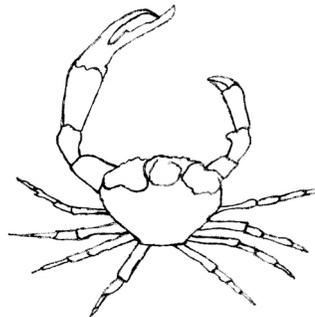


FIG. 1.5

Le crabe de la figure 1.5 n'a aucune peine à distinguer sa gauche de sa droite, car il a une pince beaucoup plus grosse à gauche. Si notre cœur était visible de l'extérieur, nous ne pourrions plus confondre notre gauche et notre droite.

Supposons que le premier être humain évoqué ci-dessus ait décidé de sa gauche et de sa droite. Comment s'y prendrait-il pour apprendre au deuxième être humain à distinguer lui aussi sa gauche et sa droite ?

Le premier n'a pas pu dire au second : ton bras gauche est celui qui porte telle marque particulière. Il a dû lui dire à peu près ceci : *regarde dans la même direction que moi, je lève un bras, lève le bras du même côté, c'est celui-là que tu appelleras le gauche.*