# Chapitre I

# FONCTIONS

## Enoncés des exercices

### Fonctions usuelles

**1.1**

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{-2x^3+x^2-1}{x^2+1}$, représentée par une courbe (C).

1°) Calculer les limites suivantes : $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$. Donner également les limites en $-\infty$ des mêmes fonctions.

Montrer que la droite (D) d'équation y = ax+b est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à cette asymptote.

**1.2**

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}$, représentée graphiquement par une courbe (C).

1°) Montrer que f est définie pour toute valeur de x, et étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.

2°) En étudiant la limite de f(x) – (x + 2) en $+\infty$, montrer que la courbe (C) possède une asymptote oblique (D) en $+\infty$.

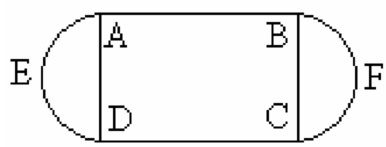
3°) En étudiant la limite de f(x) – (–x – 2) en $-\infty$, montrer que la courbe (C) possède une asymptote oblique (D') en $-\infty$.

4°) Construire, dans un repère approprié, les droites (D) et (D') et la courbe (C), et prouver que (C) possède un axe de symétrie (S).

5°) Déterminer les points de (C) dont l'ordonnée est 5.

**1.3**

Un stade d'athlétisme doit avoir la forme représentée ci-contre, et les caractéristiques suivantes :




•(ABCD) est un rectangle de longueur AB = y et de largeur AD = x (en mètres).

•Le rectangle (ABCD) est complété par deux demi-disques de diamètres [AD] et [BC]

•Le pourtour du stade : (ABFCDEA), est une piste, de longueur 500 m

1°) Calculer en fonction de x et y la longueur L de la piste périphérique (ABFCDEA).

2°) Calculer en fonction de x et y la superficie S de la partie rectangulaire (ABCD).

3°) A l'aide de ces deux résultats, montrer qu'on peut exprimer S en fonction de x seul.

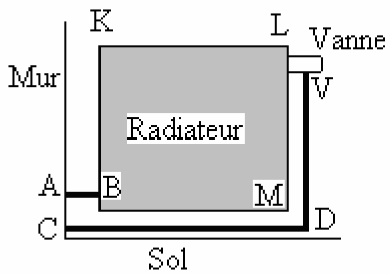
4°) Etudier complètement, puis représenter graphiquement, la fonction $x\mapsto S$.

5°) Pour quelles dimensions (x , y) le stade a-t-il une superficie totale de 4000m$^2$ ?

6°) Déterminer, à 1 cm près, les dimensions (x , y) donnant la superficie S la plus grande.

**1.4**

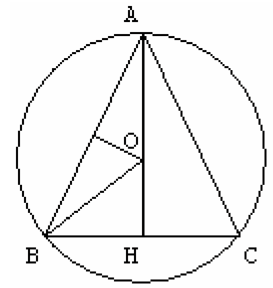
Un entrepreneur en chauffage central doit installer, dans un angle d'une pièce, un radiateur de forme rectangulaire dont la surface frontale, délimitée en grisé sur le schéma ci-contre doit être de 2,25 $m^2$ .
Les dimensions du radiateur peuvent être quelconques, mais les tubes d'alimentation en eau ne peuvent suivre que les trajets AB et CDV.



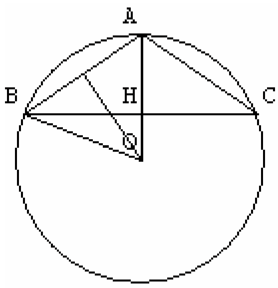

Le radiateur est à 12 cm du mur de gauche, le tube CD est à 8 cm au-dessous du radiateur, le tube DV est à 5 cm à droite du radiateur, le point V est à 12 cm plus bas que le haut du radiateur. On appelle x et y les dimensions (en cm) du radiateur (x = KL , y = LM).
1°) Exprimer en fonction de x et y la superficie du radiateur, ainsi que la longueur totale de tube nécessaire.
2°) Montrer alors qu'on peut calculer la longueur de tube en fonction de x seul. On note L(x) la longueur obtenue.
3°) Etudier les variations de la fonction L sur $[0 ,+\infty[$, ainsi que ses branches infinies, puis la représenter graphiquement.
4°) Quelle longueur de tube faut-il au minimum pour assurer la pose du radiateur ?
5°) Quelles seraient les dimensions du radiateur si 4 m de tube étaient nécessaires à la pose ?

**1.5**

Un triangle ABC isocèle de sommet principal A, est inscrit dans un cercle de centre O, de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A. On note $\alpha$ une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$, et on suppose $0<\alpha<\pi$.




1°) Calculer BC, AH et l'aire du triangle ABC en fonction de $\alpha$ (envisager 2 cas de figure : α obtus ou α aigu).



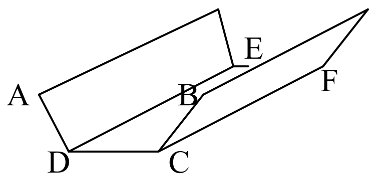

2°) On note f la fonction définie sur $[0 ;\pi]$ par :

$$f(\alpha) = (1 - \cos(\alpha)) \sin(\alpha) .$$

Etudier les variations de f .
Montrer qu'il existe une valeur de $\alpha$ pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Préciser ce maximum.

**1.6**

Un couvreur fabrique, en pliant des feuilles de zinc rectangulaires, des gouttières à profil symétrique ayant la forme trapézoïdale ci-contre (les pliages s'effectuant le long des lignes CF et DE). La feuille est pliée en trois parties de même largeur 10 cm.
La longueur de la feuille est de 120 cm.




On note x la distance AB en cm entre les deux bords de la gouttière.

1°) Montrer que la quantité d'eau maximale (exprimée en litres) que peut contenir ce tronçon de gouttière, rempli à ras bord, est donnée par :

$$V(x) = \frac{3}{100}(x+10)\sqrt{-x^2+20x+300}\ .$$

2°) Etudier complètement, puis représenter graphiquement dans un repère approprié, la fonction $x \mapsto V(x)$ obtenue en 1°) .

3°) Combien le tronçon de gouttière contient-il d'eau lorsque (ABCD) est un carré ?

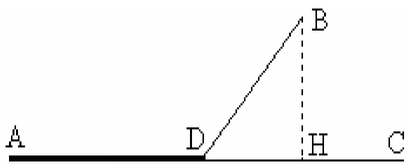
4°) Combien le tronçon de gouttière contiendrait-il si les points A et B étaient confondus ?

5°) Déterminer (à 1mm près) la valeur à donner à x pour que le tronçon contienne exactement 5 litres d'eau .

6°) Déterminer la valeur de x qui donne la gouttière à débit maximum.
Quelles sont alors les dimensions de celle-ci ( profondeur , angle (ADC) )?

**1.7**

Trois villages A,B,C sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous :




la distance AH est de 6 km
la distance HB est de 2 km
la distance CH est de 3 km
la distance AD est désignée par x (en km, $0 \leq x \leq 9$) .

On se propose d'installer des conduites d'eau suivant les tracés AD , DC , DB , le point D étant à fixer sur [AC].
La conduite AD est de grand diamètre et sa pose revient à 90 € le mètre linéaire.
Les conduites DB et DC sont de plus petit diamètre et coûtent 60 € le mètre linéaire.

1°) On suppose D choisi. Déterminer en fonction de x l'expression f(x) du prix de revient total (en €) de l'installation.

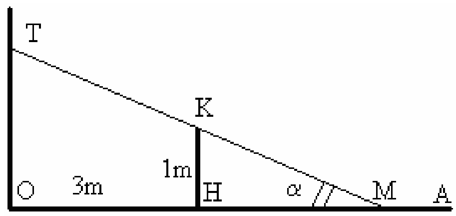
2°) a) Calculer le prix de revient du chantier pour x égal à 0 , 2 , 4 , 6 ou 8.

b) Etudier sur les intervalles [0;6] et [6;9] la fonction f obtenue.

c) Quelle est la position de D qui donnera le prix de revient le plus faible ? Quel sera alors ce prix ?

**1.8**

La construction de la toiture d'un appentis adossé à un mur existant nécessite la pose de solives [MT] , en appui :
* d'une part sur la dalle [OA]
* d'autre part contre le mur existant [OT].




Il existe un appui intermédiaire en K , la hauteur HK étant impossible à modifier.
Les dimensions données sont : OH = 3 m ; HK = 1 m.

La longueur de la solive MT est variable, et l'angle $\alpha = \widehat{OMT}$ aussi.

*Le but de l'exercice est la recherche de la solive MT qui soit la plus courte possible.*

1°) On note x (en mètres) la distance OM . Déterminer, en fonction de x, la longueur MT.

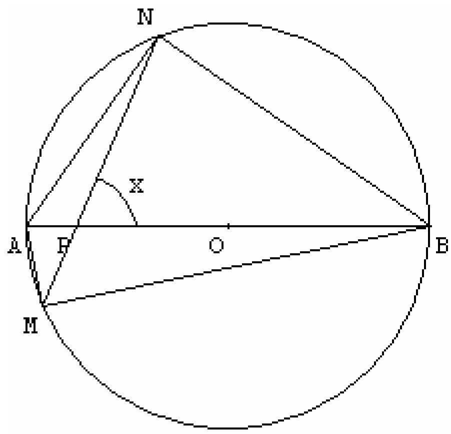
2°) On note f(x) le carré de la distance trouvée en 1°), où $x \in ]3 ; +\infty[$.

Montrer que sa dérivée f '(x) peut être mise sous la forme $f'(x) = 2x\dfrac{(x-3)^3-3}{(x-3)^3}$ .

3°) En déduire le signe de f '(x), puis le tableau de variations de f et son étude complète.
4°) Représenter graphiquement f dans un repère convenable.
5°) En déduire la valeur à donner à x pour que la solive soit la plus courte possible.
Quelle est alors la valeur de l'angle α (en degrés) de la toiture ?
6°) Déterminer, à 0,5 cm près, la distance OM pour laquelle la solive MT aura une longueur de 12 m.
7°) Dans le même repère que la courbe précédente, construire la courbe (P) définie par l'équation $y = x^2 + 1$ .
8°) Déterminer la limite de la différence $f(x) - (x^2 + 1)$ quand x tend vers $+\infty$.
Que signifie, graphiquement, le résultat obtenu ?
9°) Dans le cas plus général où on donne OH = a (en mètres) et HK = h (en mètres) , quelle est, en fonction de a et h, l'expression de la distance HM fournissant la solive la plus courte? Quelle est alors l'inclinaison α de la toiture obtenue ?

**1.9**

Soit (C) un cercle de centre O de rayon R, et un point P tel que $OP = \dfrac{3R}{4}$.




Par P on trace le diamètre [AB] de (C) (avec AP=R/4) et une corde variable [MN] (l'ordre des points sur le cercle est tel que le quadrilatère AMBN est convexe, figure ci-contre).
On note x la mesure en radians dans ]0;π[ de l'angle géométrique $\widehat{BPN}$.
1°) Faire un deuxième dessin dans le cas où $\widehat{BPN}$ est un angle obtus.
2°) Soit I le milieu de [MN] ; calculer la distance OI. En déduire l'égalité :

$$MN = \frac{R}{2}\sqrt{16-9\sin^2(x)} .$$

3°) On note f(x) l'aire du quadrilatère convexe AMBN. Montrer l'égalité :

$$f(x) = \frac{R^2}{2}\sin(x)\sqrt{16-9\sin^2(x)}$$

(on pourra considérer les deux triangles ABM et ABN).
4°) Comparer f(x) et f(π–x) ; que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
5°) Calculer la dérivée de f, et montrer que f '(x) est du signe de $\left(8-9\sin^2(x)\right)\cos(x)$.
6°) Etudier les variations de f sur [0;π/2] , et calculer le maximum de f sur cet intervalle.

**1.10**

L'étude théorique de la courbe de consommation de gazole d'un engin de chantier se déplaçant sur autoroute à vitesse stabilisée fait apparaître que cette consommation, exprimée en litres par heure, est donnée par une relation de la forme $C(x) = ax^2 + bx + c$ où x est la vitesse de l'engin en km/h , et a,b,c sont des coefficients numériques.
On suppose que la vitesse x peut varier entre 0 et 50 km/h.

1°) Les données techniques relatives à la consommation de l'engin montrent que :
* à l'arrêt, au ralenti, l'engin consomme 6 litres par heure
* à 10 km/h la consommation est de 10 litres par heure
* à 20 km/h la consommation est de 16 litres/heure.
En utilisant ces données, prouver que les coefficients a,b,c ont pour valeurs numériques respectives: $a = 0{,}01$ ; $b = 0{,}3$ ; $c = 6$ .

2°) Etudier alors les variations de la fonction C pour x variant de 0 à 50 , et représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthogonal approprié.

3°) L'engin doit effectuer un trajet de 60 km.
a) Quelle quantité de carburant (en litres) consommera-t-il s'il roule à 5 km/h ? à 10 km/h? à 20 km/h ? à 40 km/h ?

b) On suppose que l'engin se déplace à la vitesse de x km/h. Déterminer en fonction de x le temps mis pour faire le trajet, et en déduire que la quantité Q de carburant nécessaire est alors donnée, en litres, par l'expression : $Q(x) = \dfrac{0{,}6x^2 + 18x + 360}{x}$ .

4°) a) Combien l'engin consommerait-t-il s'il roulait à 8 km/h ? à 45 km/h ?

b) A quelle vitesse devrait-il rouler pour consommer exactement 70 litres?

5°) La vitesse x de déplacement de l'engin peut varier entre 0 et 50 km/h.
a) Etudier, à l'aide de sa dérivée Q'(x), les variations de la fonction Q .

b) Montrer que la courbe (E) qui représente graphiquement la fonction Q dans un repère orthogonal du plan admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.
c) Construire la courbe (E) dans un repère orthogonal approprié.

6°) Utiliser le résultat de cette étude pour trouver à quelle vitesse devrait rouler l'engin pour consommer le moins possible sur ce trajet de 60 km.
Combien de temps mettra-t-il dans ces conditions pour effectuer le trajet ?

7°) Le prix du carburant utilisé s'élève à 1,1 euro par litre, et le conducteur de l'engin perçoit un salaire de 12 euros par heure de déplacement. Montrer que, pour une vitesse quelconque x de l'engin, le prix de revient total du trajet de 60 km est donné, en euros, par:

$$R(x) = \frac{0{,}66x^2 + 19{,}8x + 1116}{x}$$

8°) En étudiant les variations de la fonction R sur l'intervalle ]0,50], déterminer la vitesse à laquelle devrait s'effectuer le déplacement pour qu'il coûte le moins cher possible à l'entreprise.

**Fonctions logarithmes et exponentielles**

**1.11**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations, ou inéquations, suivantes :

a) $\ln(2x-1) + \ln(x+1) = \ln(10x+4)$

b) $(\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3 = 0$

c) $\left|e^{x+1} - 3\right| \leq 2$

d) $\ln(4-x) - 2 \leq 0$

e) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right) \leq 0$

f) $2\,[\ln(x)]^3 + 8\,[\ln(x)]^2 - \ln(x) = 0$

g) $\ln(x+2) + \ln(2x-1) = \ln(6x)$

h) $\ln(x^2 + 3x + 4) = -1$.

**1.12**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2 + \ln(x)}{x}$.

1°) Déterminer son ensemble de définition.
2°) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier les variations de f.
3°) Montrer que la courbe (C) représentant f possède deux asymptotes.
4°) On appelle A le point de (C) dont l'abscisse est 1. Déterminer une équation de la tangente à (C) en A.
5°) Déterminer le point B où (C) coupe l'axe des abscisses.
6°) Représenter graphiquement la courbe (C), les asymptotes et la tangente trouvée en 4°).

**1.13**

Etudier et représenter graphiquement les fonctions définies respectivement par :

$f(x) = x + \ln(2 - e^x)$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

**1.14**

On donne la fonction numérique f définie par $f(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$, représentée par une courbe (F).

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f, et étudier les variations de f sur cet ensemble.
2°) Construire la courbe (F).
3°) Déduire de la représentation graphique le signe de f(x).
4°) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + \ln(x)}{x}$, représentée dans un repère orthogonal par une courbe (G).
a) Calculer $g'(x)$, et montrer que le signe de $g'(x)$ peut être déduit de celui de f(x).
b) Etablir alors le tableau de variations de g.
c) Montrer que la courbe (G) admet pour asymptote la droite (D) d'équation $y = -x + 3$.
d) Construire (G) dans un repère orthogonal approprié.
5°) a) Déterminer les coordonnées exactes du point A de (G) dont l'abscisse est e, et donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (G) au point A.
b) Quelle particularité possède cette tangente (T) ?
6°) Déterminer, à $10^{-1}$ près, les abscisses des points où (G) coupe l'axe (Ox).

**1.15**

On considère la fonction g définie sur $]-\infty,+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(1+e^{-x})$, et on note (C) sa courbe représentative.

1°) Etudier les variations de la fonction g, puis ses limites aux bornes (en $-\infty$, on pourra écrire : $1+e^{-x} = e^{-x}(e^x+1)$). Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
2 ) La courbe (C) admet-elle une asymptote en $+\infty$ ?
3°) Déterminer la position exacte des points où la courbe (C) coupe les axes de coordonnées. Tracer la courbe (C).

**1.16**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x} - 5e^x + x + 3$, représentée par une courbe (C).

1°) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Etudier les branches infinies de (C) , et montrer notamment l'existence d'une asymptote oblique (D) , d'équation $y = x + 3$ .
3°) Préciser la position de (D) par rapport à (C), ainsi que leur point d'intersection et la tangente à (C) en ce point.
4°) Construire (D) et (C).

5°) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

**1.17**

1°) Etudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 - \dfrac{e^x - 3}{e^x + 1}$.

2°) Montrer que sa courbe représentative (C) possède deux asymptotes obliques, dont on donnera les équations (on remarquera qu'on peut écrire $f(x) = x + \dfrac{4}{e^x + 1}$).

3°) Construire la courbe (C).
4°) Montrer que (C) possède un centre de symétrie, que l'on précisera.
5°) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec la droite d'équation $y = x + 3$.

6°) Montrer que f(x) peut s'écrire sous la forme $f(x) = x + 4 - \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$, et en déduire une fonction F dont f est la dérivée.

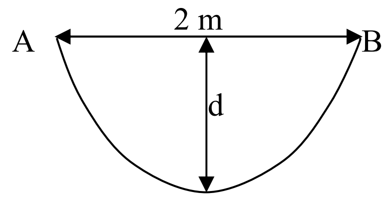
**1.18**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x^3 + 2x^2)\, e^{x+1}$ .
1°) Montrer que sa dérivée $f'(x)$ est factorisable par x.
2°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ . Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-\infty ,+\infty [$.
3°) Soit (C) la courbe représentative de f. Déterminer la position exacte des points de (C) situés sur l'axe des abscisses.
4°) Représenter la courbe (C).

**1.19**

*Une chaînette est une courbe selon laquelle se présente un fil homogène pesant flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.*
On montre (et on admet dans ce problème) que, rapportée à un repère orthonormé bien choisi, une chaînette admet une équation de la forme : $y = f_\lambda(x)$ où $f_\lambda(x) = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ ,

$\lambda$ étant un coefficient >0.
On laisse pendre un fil d'une longueur de 5 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de d (flèche prise par le fil, schéma ci-contre).
On note $(C_\lambda)$ la courbe représentative de $f_\lambda$ dans un repère orthonormé.




A et B étant les points d'abscisses $-1$ et 1 et d'ordonnée 0, la flèche est alors égale à

$$d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0) = \left(e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\right)/\left(2\lambda\right).$$

1°) Question préliminaire. Résoudre l'inéquation $e^x - e^{-x} > 0$ à l'inconnue x réelle.

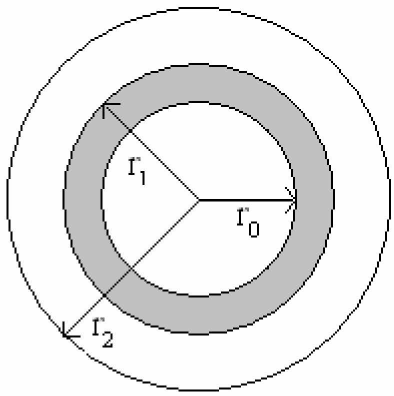
2°) Etude de $f_\lambda$ dans le cas $\lambda=1$.
Etudier la fonction $f_1$, puis dresser son tableau de variations et tracer sa courbe représentative $(C_1)$.
3°) On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points d'abscisses $x = -1$ et $x = 1$ est égale à $L(\lambda) = \dfrac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction $\lambda \mapsto L(\lambda)$ définie sur $]0;+\infty[$.
Montrer qu'elle s'écrit sous la forme $L'(\lambda) = \dfrac{N(\lambda)}{\lambda^2}$ avec $N(\lambda) = \lambda\left(e^\lambda + e^{-\lambda}\right) - e^\lambda + e^{-\lambda}$.
Montrer que la fonction N est croissante strictement sur $[0;+\infty[$, puis qu'elle est positive sur cet intervalle.
b) Calculer la limite de L en $+\infty$, et monter que la limite de L en 0 est égale à 2.
Dresser le tableau de variations de L.
c) En déduire que l'équation $L(\lambda) = 5$ admet une solution et une seule, notée $\lambda_0$, et montrer que $2,552 < \lambda_0 < 2,553$.
4°) a) Calculer la dérivée de la fonction d définie sur $]0;+\infty[$ par $d(\lambda) = \dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda} - 2}{2\lambda}$.
Montrer qu'elle s'écrit sous la forme $d'(\lambda) = \dfrac{n(\lambda)}{2\lambda^2}$ avec $n(\lambda) = \lambda\left(e^\lambda - e^{-\lambda}\right) - e^\lambda - e^{-\lambda} + 2$.
Montrer que la fonction $\lambda \mapsto n(\lambda)$ est croissante strictement sur $[0;+\infty[$, puis qu'elle est positive sur cet intervalle.
b) En déduire un encadrement de la flèche $d(\lambda_0)$.

**1.20**

Considérons un tube en acier de rayon intérieur $r_0$ et de rayon extérieur $r_1$, exprimés en m, de conductivité thermique $\lambda_a$.
La résistance thermique par mètre linéaire du tube est donnée par la formule :

$$R_{ta} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{h_i r_0} + \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\lambda_a} + \frac{1}{h_e r_1}\right]$$

où $h_i$ et $h_e$ sont des constantes physiques.




1°) Calculer $R_{ta}$ pour un tube de diamètre extérieur 48,3 mm et d'épaisseur 2,6 mm sachant que : $h_i = 2754$ W/m$^2$K $\quad h_e = 12,52$ W/m$^2$K $\quad \lambda_a = 52$ W/mK.
2°) Ce tube est isolé à l'aide d'un matériau de conductivité $\lambda = 0,031$ W/mK disposé en couche. Le rayon extérieur est $r_2$. On obtient une nouvelle résistance thermique $R_t$ pour l'ensemble.
La différence $R_t - R_{ta}$ est approchée par une fonction de $r_2$ définie par :

$$f(r_2) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{0,0798}{r_2} + 32,25\ \ln\left(\frac{r_2}{0,0241}\right) - 3,304\right],$$ $r_2$ étant exprimé en m.

a) Etudier les variations de f pour $r_2 \in [r_1 ; +\infty[$.