Sujet 2011

Exercice 1 ....

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \forall t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^t+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

2) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.

b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 ....

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a :

$$e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x \text{ et } e_2(x) = x^2.$$

On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E, associe la fonction polynomiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(P)\big)(x) = 2xP(x) - (x^2-1)\,P'(x).$$

1) a) Montrer que f est une application linéaire.

b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $\big(f(P)\big)(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

2) a) Vérifier que $\mathrm{Im}f = \mathrm{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}f$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}f$.

3) a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de la matrice A.

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\mathrm{Ker}f$, sont inclus dans $\mathrm{Im}\,f$.

Exercice 3 ....

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1) a) Pour tout i et pour tout k, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».

Écrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, P(X_i = 1) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$.

c) Comparer $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers naturels distincts, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, alors les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2) On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3) Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4) Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011 ;
Var  x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ;
Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ;
n1 : = 0 ; x1 : = 1 ;
For k : = 1 to n do
    begin
    hasard : = random(n) + 1 ;
    If  hasard = 1  then  begin x1 : = -------- ; n1 : = -------- ; end ;
    end ;
Writeln(x1, n1) ;
End.
```

Problème

❖ Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par : $P(Y=1) = P(Y=-1) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P(\,[X \le x] \cap [Y=1]\,) = P(X \le x)P(Y=1)$$
$$P(\,[X \le x] \cap [Y=-1]\,) = P(X \le x)P(Y=-1).$$

On pose $Z = X\,Y$ et on admet que Z est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

2) En utilisant le système complet d'événements $\{ (Y = 1), (Y = -1) \}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

1) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

2) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1) a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par : $F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par : $f_Z(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

2) a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.

b) Montrer que f_Z est paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

3) a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de $V(Z)$.

4) a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

5) Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable aléatoire R.

c) **I**nformatique.

En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en Turbo Pascal une déclaration de fonction dont l'en-tête est **function z : real ;** pour qu'elle simule la loi de Z.

Conseils 2011

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Utiliser les variations des fonctions exponentielle et inverse en démarrant de l'encadrement : $0 \le t \le x$.

b) Il faut multiplier par *t*, puis intégrer l'encadrement obtenu à la question 1a), et enfin multiplier les trois membres par $\dfrac{2}{x^2}$.

c) Il faut montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

2) a) La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{e^t + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t + 1}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive de la précédente.

b) Avec les variations de *g*, on obtient son signe grâce à la valeur de $g(0)$.

3) a) Il faut s'intéresser à la quantité $1 - \dfrac{t}{e^t + 1}$, c'est ce qu'il y a de plus sage.

b) La question 3a) permet de trouver une majoration de $f(x)$. Est-ce suffisant pour avoir la limite de $f(x)$ en $+\infty$?

❖ Conseils de rédaction

1) a) Il est bien de citer la décroissance de la fonction inverse, mais le minimum est de préciser sur quel intervalle (cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$).

b) Il faut bien préciser que l'on intègre bornes dans l'ordre croissant et que l'on multiplie par $\dfrac{2}{x^2}$ qui est un nombre positif : tout ceci servant à justifier que le sens des inégalités est conservé.

❖ Aide à la résolution

1) c) Le théorème d'encadrement paraît bien adapté.

2) a) Le bon démarrage pour le calcul de $f'(x)$ est :

$$f'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1}\,dt + \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{e^x + 1}$$

3) a) Noter que $\frac{t}{e^t+1} \leq 1$ est équivalent à $\frac{e^t+1-t}{e^t+1} \geq 0$. On peut ensuite étudier la fonction $t \mapsto e^t+1-t$ (le dénominateur, lui, est positif).

b) Dans le cas présent, pour obtenir la limite de $f(x)$ en $+\infty$, il faut un encadrement en utilisant l'inégalité de gauche obtenue à la question 1a).

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) Oublier de multiplier l'encadrement obtenu à la question 1a) par t avant d'intégrer et obtenir le bon résultat est une énorme supercherie bien trop visible. Pire était de multiplier par t après avoir intégré, ce qui est un non sens absolu.

c) Ce n'est pas parce que f est définie en 0 que f est continue en 0 (sinon, que devrait-on penser de celui qui a inventé la continuité ???).

2) a) Le fait que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ ne signifie pas que f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, de plus, sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$!

Malgré la pression, il faut éviter d'écrire que la dérivée d'un produit est le produit des dérivées (ici, $f(x)$ est le produit de $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ et de $x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt$.

La dérivée de $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ n'est pas $x \mapsto \frac{-4}{x^4}$.

Pour finir avec la dérivation, si h est une fonction continue, la dérivée de $x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ n'est pas égale à $x \mapsto h(x)-h(0)$, mais à $x \mapsto h(x)$. Dans cet exercice, si on faisait l'erreur, on avait de la chance puisque $h(0)=0$, mais les points alloués à la question s'évaporaient...

3) a) Pour établir une inégalité valable pour tout réel t positif, il est hors de question d'utiliser l'équivalent $e^t \underset{0}{\sim} 1+t$ (qui n'est valable qu'au voisinage de 0) et pire, de remplacer $\frac{t}{e^t+1}$ par $\frac{t}{(1+t)+1}$, ce qui est une nouvelle faute (addition d'équivalents).

b) Ayant $f(x) \leq \frac{2}{x}$, il n'est pas suffisant d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ pour obtenir : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Le "théorème de majoration" n'existe pas !

Exercice 2 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Il faut montrer que, si P et Q sont deux fonctions polynomiales et si λ est un réel, on a : $f(\lambda P+Q) = \lambda f(P)+f(Q)$.

b) Il faut trouver que $\big(f(P)\big)(x)$ s'écrit sous la forme $\alpha+\beta x+\gamma x^2$.

c) Les expressions de $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2 donnent les coefficients de la matrice : ceux de la première colonne grâce à $f(e_0)$, ceux de la deuxième colonne grâce à $f(e_1)$ et ceux de la troisième colonne grâce à $f(e_2)$.

2) a) Utiliser le fait que, puisque (e_0, e_1, e_2) est une base de E, alors on sait que $(f(e_0), f(e_1), f(e_2))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$.

b) Le théorème du rang assure que $\dim \mathrm{Ker} f = 1$: il suffit de trouver un vecteur non nul de $\mathrm{Ker} f$ pour en avoir une base.

3) b) La question sur la diagonalisabilité de f est posée avant la recherche des sous-espaces propres : qu'est-ce que ça peut bien vouloir dire ?

c) il suffit de montrer que les vecteurs de base des sous-espaces propres associés aux valeurs propres -2 et 2 sont éléments de $\mathrm{Im} f$.

❖ Conseils de rédaction

1) a) Il est bien de citer que c'est la définition des opérations sur les fonctions qui permet d'écrire $(\lambda P+Q)(x)=\lambda P(x)+Q(x)$ et que c'est la linéarité de la dérivation qui permet d'écrire $(\lambda P+Q)'(x)=\lambda P'(x)+Q'(x)$.

2) a) Ne pas parler de la dimension de $\mathrm{Im} f$ avant d'avoir montré que la famille génératrice $(e_1, e_0 + e_2)$ est libre.

3) a) Prendre garde de ne pas utiliser comme pivot une expression dépendant de λ (donc pouvant s'annuler) : un échange de ligne permet de remédier à cette situation : ceci se produit, une première fois, dès le départ et une seconde fois un peu plus tard.

Rappelons que l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow (2-\lambda^2)L_3 - L_2$ n'est pas licite. En effet, si par hasard $2-\lambda^2 = 0$, alors la ligne L_3 est remplacée par L_2, et en terme d'équations, ceci veut dire que l'on a "perdu" l'équation 3 et qu'à la place on écrit l'équation 2 : le système obtenu n'est donc plus équivalent au précédent.

❖ Aide à la résolution

1) a) Il faut établir que, pour tout réel x, on a :

$$\big(f(\lambda P+Q)\big)(x)=\lambda\big(f(P)\big)(x)+\big(f(Q)\big)(x)$$

2) b) Remarquer que $f(e_0) = f(e_2)$, ce qui donne, par linéarité de f, un vecteur de $\mathrm{Ker} f$. Si on ne voit pas cette astuce, on peut toujours résoudre le système $AX=0$.

3) a) On trouve trois valeurs propres distinctes.

b) Le fait d'avoir trois valeurs propres distinctes permet de conclure immédiatement quant à la diagonalisabilité de f.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) Il faut absolument éviter de citer la linéarité des fonctions polynomiales ! ($x \mapsto x^2$ n'est pas linéaire).

Il faut également éviter de montrer au lecteur que l'on confond la notion de sous-espace vectoriel avec celle d'application linéaire. Être obligé de lire que « f est non vide », alors que f désigne une application, est un réel supplice pour un professeur de mathématiques.

b) Il est dommage de se tromper en développant $(x^2-1)(b+2cx)$.

2) a) Ayant obtenu $\text{Im} f = \text{vect}(2e_1, e_0+e_2)$, il est surprenant de ne pas aller plus loin en écrivant $\text{Im} f = \text{vect}(e_1, e_0+e_2)$ à l'invite de l'énoncé. Cette attitude laisse une sensation de malaise chez le correcteur : le candidat est-il au courant que e_1 et $2e_1$ engendrent les mêmes vecteurs ? Plus inquiétant et manquant atrocement d'humilité était de trouver $\text{Im} f = \text{vect}(2e_1, e_0+e_2)$ et de conclure : « je pense qu'il y a une erreur d'énoncé ».

3) a) Il n'est vraiment pas bien de trouver 5 valeurs propres pour une matrice d'ordre 3 et il faut signaler que l'on s'est trompé. Le pire consiste, dans cette situation, à faire disparaître les 2 valeurs propres qui n'ont pas l'air d'en être, c'est très malhonnête et très mal vu !

b) Il n'est pas bien de chercher le sous-espace propre de f attaché à la valeur propre 0, alors qu'on l'a déjà : c'est $\text{Ker} f$!!! Là aussi, l'effet sur le correcteur est garanti.

Exercice 3..

❖ Conseils de méthode

1) a) L'événement $(X_i = 1)$ est réalisé si et seulement si l'on ne choisit jamais l'urne numérotée i lors des n épreuves.

b) Même chose qu'à la question précédente, mais deux urnes sont interdites lors de chacune des n épreuves.

c) Il suffit de faire la différence et de déterminer son signe. Pour la fin de la question, l'énoncé semble attendre que l'on montre que la covariance de X_i et X_j est différente de 0.

2) b) Pour trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, il faut revenir à l'écriture exponentielle :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

Pour la fin de la question, si l'on arrive à écrire une limite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{E(Y_n)}{u_n} = 1$, alors on peut être certain que u_n est un équivalent de $E(Y_n)$.