Sujet 2011

Exercice 1 ....

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et u un endomorphisme de E. On désigne par Id l'endomorphisme identité de E.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ est élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que l'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant : $P(u) = a_0 Id + a_1 u + ... + a_p u^p$, où, pour tout entier naturel k non nul, u^k désigne la composée de k endomorphismes égaux à u.

Dans toute la suite, Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi, on peut écrire : $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$, avec $Q_1(1) \neq 0$.

1) Montrer que Im $(u - Id)$ est incluse dans $Ker\big(Q_1(u)\big)$.

2) On note $E_1 = Ker\big(u - Id\big)$.

a) Montrer que, si x appartient à E_1, alors on a : $\big(Q_1(u)\big)(x) = Q_1(1)\,x$.

b) En déduire que : $E_1 \cap Ker\big(Q_1(u)\big) = \{o_E\}$.

c) Établir, à l'aide du théorème du rang, que l'on a : $E = E_1 \oplus Ker\big(Q_1(u)\big)$.

3) Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.

4) On suppose dans cette question que E est de dimension 3, que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$ et que 1 est valeur propre de u, le sous-espace propre associé étant toujours noté E_1.

Montrer que, si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer les cas : $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_1 = 3$).

Exercice 2 ....

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois.

On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- À chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules ne portent pas le même numéro, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$ et pour tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1) a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.

b) Donner sans calcul la valeur de l'espérance de T_1.

2) Compléter la partie principale du programme suivant pour qu'il affiche une réalisation de la variable aléatoire T_1.

```
Begin
Randomize ; Readln(n) ; t : = 0 ;
Repeat
a : = random(n)+1 ;
b : = random(n)+1 ;
t : = t+1 ;
until (--------) ;
Writeln(t) ;
End.
```

3) On pose $X_1 = T_1$ et, pour tout i de $[\![2,n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.

a) Que représente la variable X_i ?

b) Déterminer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la loi de X_i, ainsi que son espérance.

c) En déduire que T_n admet une espérance et que l'on a : $E(T_n) = n^2$.

4) On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages

a) Calculer $P(S_n = 0)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$.

c) Montrer que $P(S_n = n) = \dfrac{n!\,2^n}{(2n)!}$.

5) Expliquer ce que fait la partie principale du programme suivant.

```
Begin
Randomize ; Readln(n) ; m : = n ; z : = 0 ;
For k : = 1 to n do
   begin
      a : = random(m)+1 ; b : = random(m)+1 ;
      If a = b then begin z : = z+1 ; m : = m-1 ; end ;
   end ;
Writeln(z) ;
End.
```

Exercice 3 ....

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1) Montrer que, pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,e^{-t}dt$ est une intégrale convergente.

On admet que l'application qui à tout couple $(P,\, Q)$ *d'éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$ *associe le réel* $\langle P,\, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,e^{-t}dt$, *est un produit scalaire défini sur* $\mathbb{R}_n[X]$. *On note* $\| \ \|$ *la norme associée.*

2) a) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :

$$\langle P',\, Q\rangle + \langle P,\, Q'\rangle = \langle P,\, Q\rangle - P(0)Q(0)$$

b) En déduire que, si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à tout polynôme Q tel que $\deg(Q) < \deg(P)$, alors on a : $P(0) = \| P \|$.

3) On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant :

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ \deg(L_k) = k \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$

a) On suppose qu'il existe deux familles $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ vérifiant les relations $(\mathcal{R})$. Montrer que, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on a : $L_k = M_k$.

b) On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille obtenue à partir de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Graham-Schmidt.

(i) Justifier que, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on a : $P_k(0) = 1$.

(ii) En déduire une famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant $(\mathcal{R})$.

c) Conclure puis calculer explicitement L_1 et L_2.

Problème ....

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi. On considère aussi, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $M_n(\omega) = \max\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$.

On cherche alors des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, telles que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante.

Partie 1 : la loi exponentielle

On suppose, dans cette partie, que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x}\exp(-e^{-x})$.

a) Montrer que g est une densité de probabilité. On désigne par G une variable aléatoire admettant g comme densité.

b) Déterminer la fonction de répartition, notée F_G, de la variable aléatoire G.

2) a) Donner, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire M_n.

b) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \lambda M_n - \ln n$.

Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Partie 2 : la loi normale centrée réduite

On suppose, dans cette partie, que la loi commune des X_k est la loi normale centrée réduite dont une densité est la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1) a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$ est convergente. Établir ensuite, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$P(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$$

b) En déduire que l'on a : $\forall x > 0,\ \dfrac{\varphi(x)}{x} - \dfrac{P(X_1 > x)}{x^2} \le P(X_1 > x) \le \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Montrer alors que l'on a :

$$\forall x > 0,\ P(X_1 > x) \le \frac{\varphi(x)}{x} \le \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) P(X_1 > x)$$

2) Soit c un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{c}{n}$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution que l'on notera x_n.

3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 + 2\ln x_n = 2\ln n - \ln(2\pi c^2)$.

5) En prenant un équivalent de chaque membre de l'égalité obtenue à la question précédente, établir que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}$.

En déduire que l'on peut écrire, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_n = \sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n) \text{, avec } \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0$$

6) a) En utilisant la question 4), montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} + \left(\varepsilon_1(n)\right)^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2)$$

En prenant un équivalent de chaque membre de l'égalité ci-dessus, établir que :

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n)$$

En déduire : $x_n = \sqrt{2\ln n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n)$, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2(n)\frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)} = 0$.

On admet alors qu'en poursuivant ce processus, on pourrait écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$x_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon(n) \text{, avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2\ln n} = 0$$

7) Soit x un réel fixé quelconque.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln n}} \text{ et } b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}$$

a) On pose $c = e^{-x}$. Montrer que l'on a : $\forall n \geq 2$, $a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$.

b) Montrer également que : $\forall n \geq 2$, $\dfrac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{n}$.

c) En déduire, en utilisant la question 1b), que :

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X_1 > a_n x + b_n)$$

Prouver enfin que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable G qui a été introduite dans la partie 1.

Conseils 2011

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) Il faut montrer que tout vecteur y de $\text{Im}(u-Id)$ est élément de $Ker\left(Q_1(u)\right)$.
Pour ce faire, on écrit qu'il existe un vecteur x de E tel que $y=(u-Id)(x)$ et on montre que $\left(Q_1(u)\right)(y)=0_E$.

2) a) Il faut penser à montrer que, si x appartient à E_1, alors, pour tout entier naturel k, on a : $u^k(x)=x$.

b) Utiliser la question précédente pour conclure que, si x appartient à $\text{Ker}\left(Q_1(u)\right)$, alors $x=0_E$.

c) Il suffit de montrer que $\dim E_1+\dim\text{Ker}\left(Q_1(u)\right)=n$.

3) Pour la condition nécessaire, on peut remarquer que, si $Q_1(u)=0$, alors $\text{Ker}\left(Q_1(u)\right)=E$, puis utiliser la question précédente.
Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre de u, alors $u-Id$ est bijectif , ce qui peut donner l'idée de composer par $\left(u-Id\right)^{-1}$ dans une égalité intéressante.

4) Si $\dim E_1=3$, alors $E_1=E$, ce qui donne un énorme renseignement sur $u-Id$.
Si $\dim E_1=2$, montrer que l'endomorphisme $u+Id$ n'est pas bijectif : ceci donne une deuxième valeur propre pour u.

❖ Conseils de rédaction

1) Il n'est pas question d'écrire que $Q_1(u)\circ(u-Id)=(u-Id)\circ Q_1(u)$ sans argumenter.

2) a) Si on a l'idée de montrer que, pour tout entier naturel k, on a $u^k(x)=x$, il faut assurer en faisant une récurrence.

3) Attention de bien faire deux démonstrations : partie directe et partie réciproque.

❖ Aide à la résolution

1) Montrer que $Q_1(u)$ commute avec $(u-Id)$ pour pouvoir bénéficier du fait que $Q(u)=0$.

2) a) Poser $Q_1(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, appliquer cette égalité avec $X=u$ et utiliser le fait que $u^k(x)=x$.

b) Si x est un vecteur de $E_1 \cap \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big)$, alors, comme x appartient à E_1, on a d'après la question précédente : $\big(Q_1(u)\big)(x)=Q_1(1)\,x$. La conclusion n'est pas loin.

c) On sait, d'une part, que $\dim\Big(E_1 \oplus \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big)\Big) \le n$ et, d'autre part, on peut écrire, grâce au théorème du rang, que : $\dim E_1 + \dim \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big) \ge n$.

3) Ayant établi que $\mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big)=E$, alors on a $E_1=\{0_E\}$, et c'est terminé.

4) Si $\dim E_1 = 3$, alors on trouve que : $u = Id$.
Si $\dim E_1 = 2$, la somme des dimensions des sous-espaces propres qui sont déjà en notre possession, permet de conclure.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) Il faut éviter d'écrire $Q_1\big((u(y)\big)$ en lieu et place de $\big(Q_1(u)\big)(y)$: la première expression n'a pas de sens (ce serait l'image d'un vecteur par un polynôme), alors que la deuxième désigne l'image du vecteur x par l'endomorphisme $Q_1(u)$.

L'égalité $\big(Q(u)\big)(x)=(u(x)-x)Q_1(u)(x)$ est inepte, puisque le membre de droite serait le produit de deux vecteurs, ce qui n'a pas de sens.
Les deux fautes signalées ci-dessus empêchent définitivement la mise en place d'un raisonnement correct.
Voici deux énormités.
La première est : "$Q(u)=(u-1)Q_1(u)$". Elle contient deux non sens, $u-1$ ne veut rien dire puisque u est un endomorphisme et $(u-1)Q_1(u)$ n'a pas de sens non plus, puisque ce serait, encore faudrait-il qu'on ait $(u-Id)Q_1(u)$, le produit de deux endomorphismes (et pas leur composée)
La deuxième est : "$Q_1(y)=\dfrac{Q(y)}{y-1}$", où y désigne un vecteur de E. Elle contient aussi deux non sens dont l'un en double exemplaire : les écritures $Q_1(y)$ et $Q(y)$ n'ont pas de sens puisque l'on appliquerait un polynôme à un vecteur, et la division par le "vecteur" $y-1$ est sidérante pour deux raisons : $y-1$ ne veut rien dire (différence entre un vecteur et un réel) et si c'était un vecteur, on ne pourrait sûrement pas effectuer cette division !

2) Il est insuffisant d'affirmer que, comme E_1 et $Ker\left(Q_1(u)\right)$ sont deux sous-espaces de E, alors on a : $\dim E_1 + \dim \mathrm{Ker}\left(Q_1(u)\right) \leq n$.

Voici un contre exemple en prenant, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$: ils sont chacun de dimension 2 et la somme de leurs dimensions vaut 4 (ce qui est plus grand que 3)...

3) Le fait que 1 ne soit pas valeur propre de u ne signifie pas que $u - Id \neq 0$, et pas non plus que, pour tout x de E, on a : $u(x) \neq x$ (puisque l'on a **toujours** $u(0_E) = 0_E$)... En fait, 1 n'est pas valeur propre de u signifie que $u - Id$ est injectif (donc bijectif car $u - Id$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie).

D'autre part, ayant $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}\left(Q_1(u)\right)$, il ne faut pas croire que, si x n'appartient pas à $\mathrm{Ker}\left(Q_1(u)\right)$, alors x appartient à E_1.

Voici un contre exemple en prenant, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3)$, qui sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $e_1 + e_3$ n'appartient pas à F, mais il n'appartient pas non plus à G !...

Exercice 2 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Il faut noter que T_1 est le temps d'attente d'un premier succès lors d'épreuves indépendantes puisque tant que l'on n'a pas obtenu de paire, on remet les boules tirées dans l'urne. La variable T_1 est donc géométrique...

b) C'est du cours si l'on a le résultat de la question précédente.

2) Il faut juste traduire en "langage informatique" le fait que l'on attend une paire, c'est-à-dire que les numéros tirés soient égaux.

3) b) La variable X_i est géométrique pour des raisons analogues à celles évoquées dans la première question. Seul le paramètre change et il faut connaître le contenu de l'urne à ce moment là : combien de boules (combien de paires) sont encore présentes dans l'urne ?

c) Penser à sommer les égalités $X_i = T_i - T_{i-1}$.

4) a) L'événement $(S_n = 0)$ est réalisé si l'on n'obtient aucune paire. Dès lors les n tirages effectués sont indépendants.

b) Il faut revenir à une notation exponentielle de $P(S_n = 0)$ et utiliser un équivalent bien connu.