Chapitre 1- Électrostatique

L'électrostatique a pour objet l'étude des phénomènes électriques produits par des charges électriques immobiles.

Objectif général : connaître les propriétés générales du champ électrostatique et du potentiel électrostatique.

I. Résumé de cours

I.1. Interactions coulombiennes

I.1.1. Charges électriques

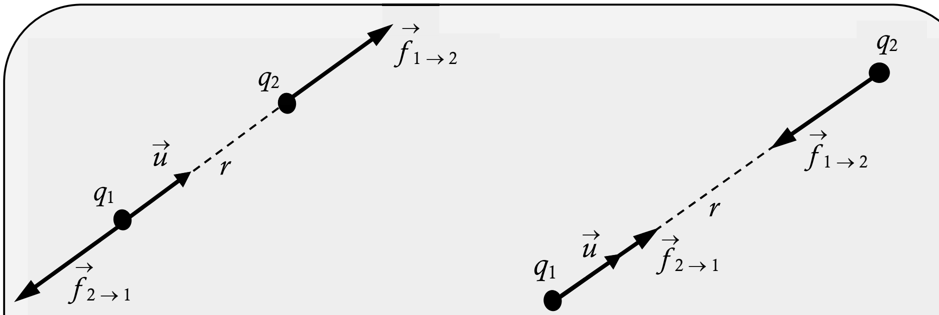
- Une charge ponctuelle est caractérisée par sa charge électrique notée q ($q > 0$ ou $q < 0$) : $|q| = ne$; n est un nombre entier strictement positif et e est la charge électrique élémentaire ($e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C) ; q s'exprime en coulomb (symbole : **C**) ;
- Pour une distribution discrète de N charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3, \ldots q_N$, la charge totale Q de la distribution est : $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$;
- Pour une distribution continue de charges quelconque, on définit une charge dq infinitésimale associée à une densité de charge linéique λ, une densité de charge surfacique σ ou à une densité de charge volumique ρ :

  - distribution linéique sur un fil de longueur dl: $dq = \lambda dl$; λ en $\mathbf{C \cdot m^{-1}}$;
  - distribution surfacique sur une surface dS : $dq = \sigma dS$; σ en $\mathbf{C \cdot m^{-2}}$; (1.1.a)
  - distribution volumique dans un volume dV : $dq = \rho\, dV$; ρ en $\mathbf{C \cdot m^{-3}}$.

I.1.2. Loi de Coulomb

La loi de Coulomb exprime les forces électrostatiques s'exerçant entre deux charges électriques ponctuelles, immobiles et placées dans le vide.

- Les forces d'interaction coulombienne sont :
  - soit **répulsives** si les charges sont de **même signe** (fig.1.1.a) ;
  - soit **attractives** lorsque les charges sont de **signes opposés** (fig.1.1.b).



(**a**) q_1 et q_2 sont de **même signe**

(**b**) q_1 et q_2 sont de **signes opposés**

Fig.1.1. *Forces coulombiennes entre deux charges q_1 et q_2 ponctuelles et fixes.*

- En vertu de la loi de Coulomb, la force $\vec{f}_{i\to j}$ exercée par la charge q_i sur la charge q_j est égale et opposée à la force $\vec{f}_{j\to i}$ exercée par la charge q_j sur la charge q_i, soit :

- Fig.1.1. (**a**) : cas de forces **répulsives**.

$$\begin{cases} \vec{f}_{1\to 2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} \\ \vec{f}_{2\to 1} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1} \;. \tag{1.1.b}$$

- Fig.1.1. (**b**) : cas de forces **attractives**.

$$\begin{cases} \vec{f}_{1\to 2} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} \\ \vec{f}_{2\to 1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1} \;. \tag{1.1.c}$$

On pose souvent : $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ SI.

- ε_0 : permittivité diélectrique du vide ;
- r : distance entre les deux charges q_1 et q_2 ;
- approximativement : $\varepsilon_0 = 8{,}84 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

- Les deux forces $\vec{f}_{i \to j}$ ont même norme :

$$f_{1\to 2} = f_{2\to 1} = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{1.2}$$

f en newton (**N**), q en coulomb (**C**) et r en mètre (**m**).

Remarque
L'unité de la permittivité diélectrique du vide vient de la relation de définition de la capacité C d'un condensateur plan dont les armatures distantes de d, ont une surface S et sont séparées par le vide : $C = \varepsilon_0 S/d \Rightarrow \varepsilon_0 = Cd/S$. C en farad (**F**), d en mètre (**m**) ; S en mètre – carré (**m²**) ; d'où ε_0 s'exprime en farad par mètre ($\mathbf{F \cdot m^{-1}}$).

I.1.3. Force électrostatique résultante entre plusieurs charges

- La résultante des forces électrostatiques exercées par un ensemble de N charges ponctuelles q_i fixes, sur une charge ponctuelle q fixe placée à une distance r_i de chaque charge q_i, est donnée par le principe de superposition :

$$\vec{F} = k\frac{qq_1}{r_1^2}\vec{u}_1 + k\frac{qq_2}{r_2^2}\vec{u}_2 + k\frac{qq_3}{r_3^2}\vec{u}_3 + \dots\dots\dots = k\sum_{i=1}^{N}\frac{qq_i}{r_i^2}\vec{u}_i. \tag{1.3}$$

$\vec{u}_i$: vecteur unitaire dirigé de la charge q_i vers la charge q.

I.2. Champ et potentiel électrostatiques

I.2.1. Cas d'une charge ponctuelle

- Une charge ponctuelle q fixe et placée en un point O de l'espace, crée en un point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, un champ électrostatique $\vec{E}(r)$ et un potentiel électrostatique V(r) donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{E}(r) = k\frac{q}{r^2}\vec{u}. \tag{1.4}$$

$$V(r) = k\frac{q}{r} + C^{te}. \tag{1.5}$$

- Le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ est *divergent* si $q > 0$ (fig.1.2.a) et convergent si $q < 0$ (fig.1.2.b) ;

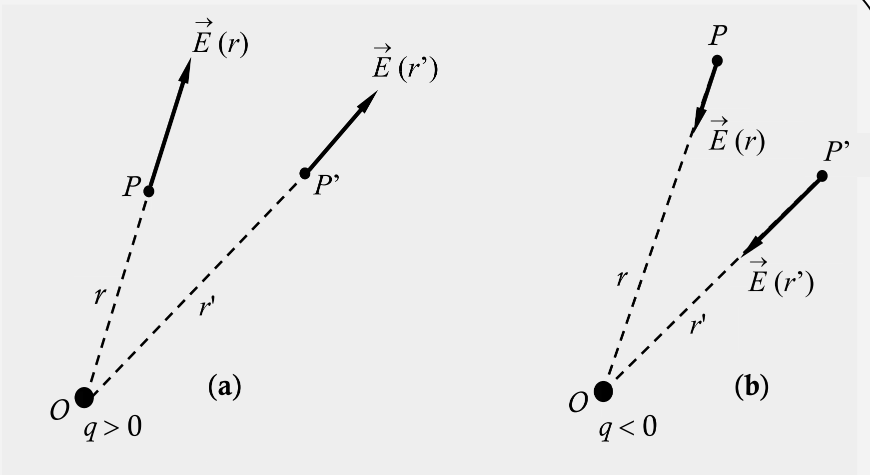


Fig.1.2. *Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q.*

- Le potentiel électrostatique est défini à une constante additive près ;
- Le champ et le potentiel électrostatiques sont liés par la relation :

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}\, V(r)\,. \tag{1.6}$$

- En utilisant (1.3) et (1.4), on tire la relation entre la force électrostatique subie par une charge ponctuelle q' placée dans le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ créé par une autre charge ponctuelle q (fig.1.2):

$$\vec{F} = q'\,\vec{E}(r)\,. \tag{1.7}$$

I.2.2. Cas d'une distribution continue de charges

Dans le cas d'une distribution continue de charges, le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrostatique $V(r)$ sont donnés par les expressions :

- distribution linéique l (fig.1.3.a) :

$$\vec{E}(r) = k\int_{AB} \frac{\lambda}{r^2} dl\,\vec{u} \ . \tag{1.8.a}$$

$$V(r) = k\int_{AB} \frac{\lambda}{r} dl \ . \tag{1.8.b}$$

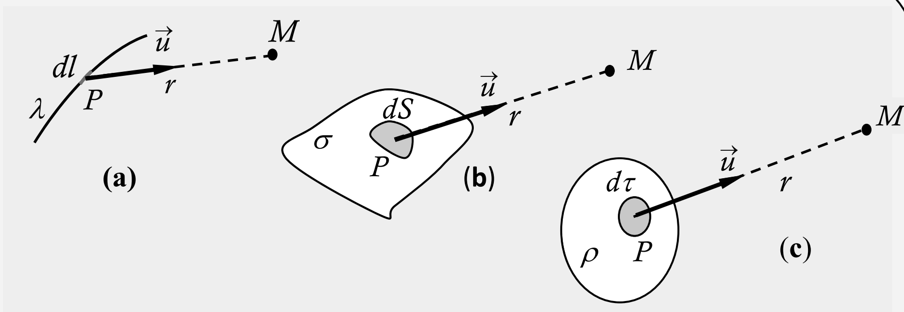


Fig.1.3. *Distributions continues de charges.*

- distribution surfacique *S* (fig.1.3.b) :

$$\vec{E}(r) = k\iint_S \frac{\sigma}{r^2} dS\,\vec{u} \ . \tag{1.9.a}$$

$$V(r) = k\iint_S \frac{\sigma}{r} dS \ . \tag{1.9.b}$$

- distribution volumique *V* (fig.1.3.c) :

$$\vec{E}(r) = k\iiint_V \frac{\rho}{r^2} d\tau\,\vec{u} \ . \tag{1.10.a}$$

$$V(r) = k\iiint_V \frac{\rho}{r} d\tau \ . \tag{1.10.b}$$

I.3. Énergie potentielle électrostatique

I.3.1. Cas d'une charge ponctuelle

- Soit une charge ponctuelle isolée q_1 fixée dans l'espace (fig.1.4).
- La charge ponctuelle q_2 est susceptible de se déplacer. L'énergie potentielle E_p du système de charges $\{q_1, q_2\}$, est égale au travail fourni par un opérateur pour amener la charge q_2 de l'infini à la distance r_{12} de la charge ponctuelle q_1 de telle sorte que chaque position soit une position d'équilibre, c'est-à-dire :

$$E_p = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = k\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} . \tag{1.11}$$

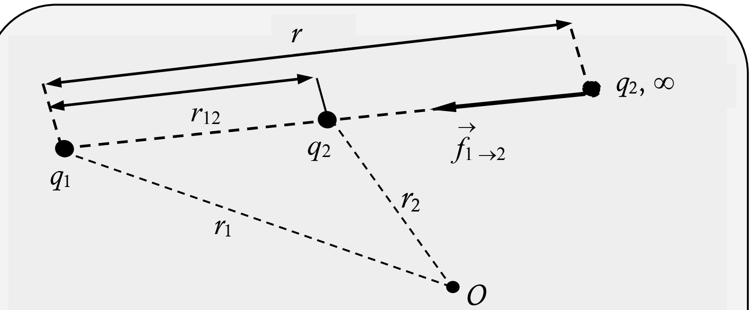


Fig.1.4. *Interaction attractive entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 (q_1 est fixe).*

- Le résultat (1.11) est aussi valable dans le cas de deux charges ponctuelles en interaction répulsive (*charges de même signe*).

I.3.2. Cas d'une distribution de charges

- Soit par exemple une distribution discrète de trois charges ponctuelles q_1, q_2 et q_3. L'énergie potentielle E_p du système de charges $\{q_1, q_2, q_3\}$ est égale à:

$$E_p = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} . \tag{1.12.a}$$

Sous forme condensée, l'expression (1.12.a) s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i V_i . \tag{1.12.b}$$

- Dans l'expression (1.12.b), V_i désigne le potentiel électrostatique créé par toutes les charges à l'emplacement de la charge q_i. Ce potentiel est donné par l'expression :

$$V_i = k\sum_{j \neq i}\frac{q_j}{r_{ij}} . \tag{1.13.a}$$

- Pour un système de plusieurs charges ponctuelles, l'énergie potentielle E_p du système global est égale à :

$$E_p = k\sum_{i,i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} . \tag{1.13.b}$$

- L'énergie potentielle E_p peut être exprimée en fonction du potentiel V_i, soit :

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i . \tag{1.13.c}$$

- Pour une distribution continue de charges, l'énergie potentielle E_p du système de charges est donnée par l'expression :

$$E_p = \frac{1}{2}\int V dq . \tag{1.14}$$

Dans l'expression (1.14), le potentiel électrostatique V a été déjà défini pour une distribution linéique (1.8.b), surfacique (1.9.b) ou volumique (1.10.b). La charge élémentaire dq est définie par les relations (1.1.a) que nous rappelons :

- distribution de densité linéique λ sur un fil de longueur dl: $dq = \lambda dl$;
- distribution de densité surfacique σ sur une surface dS : $dq = \sigma dS$;
- distribution de densité volumique ρ dans un volume dV : $dq = \rho dV$.

I.4. Énergie électrostatique

I.4.1. Expression

- Considérons une distribution continue de charges dans un domaine de l'espace de volume V. Soit $\vec{E}$ le champ électrostatique créé par cette distribution. L'énergie électrostatique totale W dans le volume V est égale à:

$$W = \iiint_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau . \tag{1.15}$$

I.4.2. Densité d'énergie électrostatique

- De l'expression (1.15) de l'énergie électrostatique totale, on associe une densité d'énergie électrostatique notée u telle que :

$$u = \frac{dW}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \tag{1.16}$$

I.5. Circulation du champ électrostatique

I.5.1. Lignes de champ électrostatique et surfaces équipotentielles

- Les **lignes de champ** électrostatique sont des courbes orientées et tangentes en chaque point au champ électrostatique ;
- Pour une charge ponctuelle placée en O, les lignes de champs sont des lignes droites *divergentes* si $q > 0$ (fig.1.5.a) et *convergentes* si $q < 0$ (fig.1.5.b) ;
- Plus les lignes de champ sont denses, plus le champ électrostatique est intense ;
- Les **surfaces équipotentielles** sont constitués d'un ensemble de points ayant le même état électrique (c'est-à-dire correspondants à la même valeur du potentiel V) ;
- Dans le cas d'une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques centrées en O (fig.1.5).

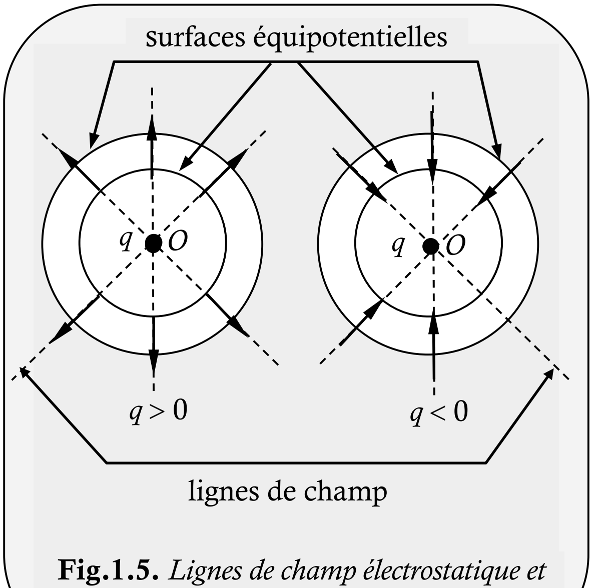


Fig.1.5. *Lignes de champ électrostatique et surfaces équipotentielles.*