



Les mathématiciens grecs et Euclide

Euclide (330-270 av. J.-C.) effectue dans ses *Éléments* – traité en treize livres – une merveilleuse synthèse des mathématiques de son temps. Nous croyons donc utile de dire quelques mots de la science en Grèce avant Euclide.

Thalès et son fameux théorème

On connaît peu de choses sur Thalès (625-548 av. J.-C.) car aucun de ses écrits ne nous est parvenu et c'est d'ailleurs le cas pour tous les présocratiques¹. Il est certain que Thalès a constitué une figure prestigieuse du monde antique, mais on sait bien que les hommes célèbres, comme lui, ont été crédités de découvertes qu'ils n'avaient pas faites. Thalès naît aux environs de 625 av. J.-C. à Milet, en Ionie sur les bords de la mer Égée. De Milet, Thalès part pour l'Égypte, le berceau de la civilisation, et c'est là qu'il découvrira le théorème qui immortalisera son nom. Il est mathématicien mais également philosophe, ingénieur et commerçant. Il faut toutefois remarquer qu'à cette époque philosophie et mathématiques sont totalement imbriquées et que ces mots n'existaient pas encore. Il n'en reste pas moins que Thalès peut, sans conteste, être considéré comme le premier savant philosophe. Selon Aristote, Thalès est même le fondateur de la philosophie des « physiciens », dont l'objet est de chercher les causes naturelles² sans recours aux mythes et aux explications surnaturelles. Thalès serait mort de vieillesse alors qu'il assistait aux jeux olympiques³. Considérons plus particulièrement son œuvre en mathématique. Thalès est le premier à considérer l'angle comme un être mathématique à part entière et il en fait une grandeur fondamentale au même titre que la longueur, la surface et le volume. Il semble être à l'origine de cinq affirmations qui sont maintenant des théorèmes, mais qu'il n'a sans

1. Les principales sources d'informations concernant Thalès sont Hérodote et Diogène Laërce (doxographe du II^e ou III^e siècle ap. J.-C.).
2. Le mot physique vient de *physis* : philosophie de la nature.
3. Les jeux olympiques datant de 776 av. J.-C. il s'agissait sans doute de la 58^e olympiade.

doute pas, à l'époque, démontrés¹. Les cinq affirmations de Thalès peuvent s'énoncer ainsi :

- Les angles opposés par le sommet formés par deux droites qui se coupent sont égaux.
- À chaque triangle on peut faire correspondre un cercle passant par ses trois sommets (le cercle circonscrit). Il en propose une construction générale (le centre du cercle est à l'intersection des médiatrices des trois segments délimitant le triangle). Par ailleurs il découvre que l'angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit (cette découverte, dit-on, a littéralement enthousiasmé Thalès).
- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.
- Pour qu'une droite coupe un cercle en deux parties égales elle doit obligatoirement passer par son centre.
- Le « théorème de Thalès » qui s'énonce ainsi : toute parallèle à un côté d'un triangle détermine deux triangles semblables.

C'est en cherchant à mesurer la hauteur de la pyramide de Kheops qu'il découvre son théorème ; « le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne » indique Thalès. Il en déduit ainsi qu'à l'instant où son ombre sera égale à sa taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur ! (La pyramide de Kheops étant quatre-vingt-cinq fois plus haute que Thalès et mesurant 147 mètres, on en déduit que Thalès mesurait 1,73 m !)

Le souci de Thalès de trouver des propriétés générales sur des objets géométriques en fait, sans conteste, le premier mathématicien où, plus exactement, le premier géomètre de l'histoire.

Pythagore et les mathématiques au temps présocratique

Pythagore (570-480 av. J.-C.) est très mal connu. Il serait né à Samos, en Ionie, où il a été en contact avec la pensée milésienne. Il étudie à Milet sous la férule d'Anaximandre et certains disent même qu'il aurait suivi les cours de Thalès, lequel aurait vu en Pythagore un génie supérieur au sien. Selon la tradition, c'est à Pythagore que l'on doit le terme de *philosophie*, qui accorde d'ailleurs une place importante à ce qui deviendra les mathématiques. Pour

1. C'est ainsi que Bertrand Russel indique à propos de la contribution de Thalès aux mathématiques : on dit que Thalès a voyagé en Égypte et qu'il en a rapporté en Grèce la géométrie. Ce que les Égyptiens connaissaient de la géométrie étaient essentiellement des règles de l'art, et il n'y a pas de raison de croire que Thalès soit parvenu à des preuves déductives, qui ne sont apparues que plus tard en Grèce.

Pythagore (ou plutôt pour les pythagoriciens) on trouve dans les nombres le principe de toutes les choses (« tout est nombre »). Les pythagoriciens s'avisent que les nombres existent indépendamment du monde tangible, ce qui fait la force de leur approche. Outre son fameux théorème (dont les premières traces remontent aux Babyloniens, mille ans auparavant), on lui doit celui sur la somme des angles d'un triangle et le début du calcul des proportions. Les polyèdres pythagoriciens sont également bien connus, ils sont inscriptibles dans une sphère et au nombre de cinq ; le tétraèdre, l'octaèdre, le cube, l'icosaèdre et le dodécaèdre.

On raconte qu'Hippase, un élève de Pythagore, avait également découvert l'existence des nombres irrationnels. Mais son maître Pythagore, avait soutenu l'impossibilité de tels nombres et ne voulant pas admettre qu'il avait tort (et ne pouvant pas non plus dominer l'argument de son élève), il le fit noyer.

L'harmonie des sphères

En cosmologie, les pythagoriciens imaginent que les corps célestes visibles sont situés sur des sphères concentriques, elles-mêmes invisibles, dont le mouvement les entraîne. C'est la fameuse théorie de l'harmonie des sphères célestes. Il est remarquable de constater que les pythagoriciens affirment que le centre du monde est occupé par du feu, et que la Terre est un astre parmi les autres, produisant la nuit et le jour par son trajet circulaire autour de ce centre.

Pythagore découvre aussi que les longueurs des cordes identiques qui émettent des sons consonants sont dans des rapports simples, par exemple trois à deux pour ce que nous appelons une quinte. Chez les pythagoriciens musique et astronomie sont d'ailleurs liées. C'est ainsi que pour eux « les sept sphères donnent les sept sons de la lyre et produisent une harmonie (c'est-à-dire une octave), à cause des intervalles qui les séparent deux à deux ».

L'Académie de Platon et le Lycée d'Aristote

Platon (427-348 av. J.-C.) est un disciple de Socrate¹ (470-399 av. J.-C.). De Socrate il hérite la dialectique ; tous ses écrits sont sous forme de dialogues, mais, contrairement à ce dernier, il ne se limite pas aux problèmes de la morale et donnera une contribution importante à la science grecque. Platon (comme Empédocle) considère que toute substance naturelle est un

1. Dont on connaît la célèbre devise : « Connais-toi toi-même ».

composé des quatre corps simples : le feu, l'air, l'eau et la terre. Mais à la différence d'Empédocle il identifie chacun des quatre corps simples à l'un des solides réguliers : le feu avec le tétraèdre, l'air avec l'octaèdre, l'eau avec l'icosaèdre et la terre avec le cube (le cinquième solide régulier, le dodécaèdre, est associé à un cinquième élément qui embrasse tous les autres). Platon croit en une structure mathématique de l'Univers et en une physique idéale, mathématique. Son œuvre exercera une influence durable, et la physique du XV^e siècle renouera avec le « mathématisme » platonicien. De même son Académie, sur le fronton de laquelle est inscrit « que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre », fondée en 387 av. J.-C., inspirera les académies de la Renaissance.

Aristote (384-322 av. J.-C.), disciple de Platon (il séjourne vingt ans dans sa célèbre Académie), fonde à Athènes sa propre école, le Lycée, en 335 av. J.-C. Le Lycée est une école rivale de l'Académie de Platon. On l'appelle également *Peripatos* car Aristote enseignait en marchant (du grec *peripatein*, se promener), c'est pourquoi on appelle encore péripatéticiens les tenants de la doctrine d'Aristote. L'Académie comme le Lycée sont des institutions qui ont permis les premières recherches en collaboration. Tandis que les mathématiques représentent le point fort de l'Académie, et les sciences biologiques le point faible, c'est l'inverse pour le Lycée, au moins à l'époque de sa direction par Aristote puis par Théophraste. La pensée d'Aristote tranche sur le rationalisme mathématisant de Platon et repose sur une approche plus expérimentale. Il fait triompher le point de vue d'Empédocle et sa théorie des quatre éléments (l'eau, l'air, la terre et le feu) pour plusieurs siècles. Son principal titre de gloire a été de fonder la logique, c'est-à-dire cet ensemble de règles contraignantes qui permettent de faire du discours (*logos*) l'usage le plus cohérent et le plus efficace.

Les œuvres d'Euclide

Les *Éléments* inspireront un grand nombre de savants à travers les siècles. Les *Éléments* ont connu huit cents éditions (seule la Bible dépasse ce nombre) et représentent un monument mathématique qui a été utilisé pendant plus de deux millénaires. Les *Éléments* sont probablement un ensemble d'ouvrage d'une École plutôt que celui d'un homme seul (on ignore d'ailleurs tout de la vie d'Euclide) et la démarche utilisée est, pour la première fois dans l'histoire, axiomatique. Ainsi Euclide peut être considéré comme l'ancêtre de Bourbaki, premièrement à cause du caractère collectif de l'œuvre, deuxièmement à cause de l'aspect axiomatique de la construction et enfin par la volonté de construire l'ensemble des mathématiques. Euclide prouve de plus (par l'absurde) l'existence des nombres irrationnels (comme

$\sqrt{2}$ ou π). Même si les *Éléments* constitue le traité le plus connu, ils ne sont pas le seul ouvrage composé par Euclide. On lui doit également un traité sur les coniques (qui n'est malheureusement pas parvenu jusqu'à nous), un sur le partage d'une surface dans une proportion donnée et un sur les erreurs en géométrie. Euclide applique sa géométrie à l'optique (voir encadré), à l'astronomie (dans un livre intitulé *Phoenomena*), ainsi qu'à la musique.

Les *Éléments* d'Euclide font l'objet de l'analyse de texte du présent chapitre. Nous verrons que les livres I à IV traitent de géométrie plane ; les livres V à X font intervenir les proportions ; les livres XI à XII traitent de géométrie dans l'espace. Même si les *Éléments* reprennent pour une large part la découverte des prédécesseurs, ils n'en constituent pas une compilation, et les propositions sont classées dans un ordre logique, sans référence historique.

L'optique d'Euclide

On doit également à Euclide une « *Optique* ». Euclide, comme beaucoup de pythagoriciens, croit à une « théorie du feu visuel » selon laquelle l'œil est le siège d'une émission spécifique permettant la vision. Son *Optique* est un traité d'« optique géométrique et de catadioptrique » qui restera justement célèbre. Il y introduit la notion de rayon lumineux, les principes de propagation rectiligne et de retour inverse de la lumière, et donne la loi de la réflexion. Cela lui permet ensuite de s'appuyer sur les constructions tirées de ses *Éléments*. Euclide doit ainsi être considéré comme l'un des grands noms de l'histoire de l'optique. Son influence a d'ailleurs été considérable : sept siècles après sa disparition, ses livres étaient encore édités et servaient de livres d'études.

Il faut attendre le XI^e siècle pour qu'une nouvelle étape soit franchie. Elle l'est par le physicien arabe Ibn al Haytham, plus connu sous le nom d'Alhazen (965-1039). Contrairement à Euclide, il attribue à la lumière une origine extérieure à l'œil, tout en reprenant le concept de rayons lumineux. Grâce à un travail expérimental rigoureux, il établit la correspondance biunivoque entre chaque point de l'image et chaque point de l'objet et s'approche de la loi de la réfraction. Il montre en particulier que les rayons réfléchis et réfractés sont dans le plan d'incidence. Son ouvrage *Opticae thesaurus Alhazeni Arabis* sera consulté jusqu'au XVII^e siècle. Alhazen y étudie, en particulier, la réflexion sur les miroirs plans, concaves, convexes, sphériques, cylindriques, coniques... Le Persan Kamâl al-Din (mort en 1320) continue son œuvre et explique (de façon fort juste) le phénomène d'arc-en-ciel.

Diophante, l'Euclide de l'arithmétique

Diophante, qui est à la théorie des nombres ce qu'Euclide est à la géométrie, a probablement vécu au II^e ou III^e siècle de notre ère. Son traité *Arithmetica* en treize livres (dont six seulement nous sont parvenus) rassemble toutes les connaissances de son temps (ainsi que ses propres recherches) sur ce sujet. Son ouvrage inspira Pierre de Fermat (1601-1665) lorsqu'il énonça en 1637 son fameux « grand théorème » (il n'existe pas d'entiers x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que l'entier n est supérieur à 2). Ce théorème résista plus de 350 ans et n'a été finalement démontré par Andrew Wiles qu'en 1993 (voir chapitre 10).

Analyse d'une œuvre : *Preclarissimus liber elementorum Euclidis, in artem geometriae* (Les *Éléments*), 1482

Les éditions des Éléments

La première édition d'un texte imprimé des *Éléments* d'Euclide est la traduction latine parue à Venise en date du 25 mai 1482. La première impression du texte grec est due à Simon Grynaeus et paraît à Bâle en 1533. La première édition complète des œuvres en grec d'Euclide est celle de David Gregory publiée à Oxford en 1703. C'est le seul texte complet disponible jusqu'à la parution, à partir de 1883, des *Euclidis opera omnia*, neuf volumes publiés par J.L. Heiberg et H. Menge à Leipzig. Entre 1482 et 1600, quatre-vingt-quatre différentes éditions des *Éléments* sont produites.

Preclarissimus liber elementorum Euclidis, in artem geometriae, l'édition de Venise de 1482, est le plus ancien texte de science imprimé. Le texte initial écrit vers 300 av. J.-C. a été probablement traduit par Adelard de Bath vers 1260 à partir d'un manuscrit arabe. Ce texte fut révisé à la même époque par Campano de Novare qui a peut-être eu accès à d'autres manuscrits arabes. L'éditeur vénitien Erhard Radolt réalise avec les *Éléments* l'un des premiers textes imprimés incorporant des diagrammes géométriques. Deux éditions d'Euclide seulement paraissent avant 1500, les sciences étant alors beaucoup moins prisées que la philosophie qui voit, par exemple, soixante-dix éditions de Boethius paraître entre 1455 et 1500.

Le texte d'Euclide comporte treize livres et a exercé une influence sur l'esprit humain supérieure à celle de toute autre publication sauf la Bible. Ce que l'on appelle les livres XIV et XV des *Éléments* ne sont pas d'Euclide. Le livre XIV est sans doute de Hypsicles d'Alexandrie et a été écrit durant le deuxième siècle av. J.-C. et le livre XV a été composé à la même époque par un élève de Isidore de Milet. Proclus Diadochus (IV^e siècle) dans son commentaire d'Euclide, retrouvé en 1533 et traduit en latin par F. Barozzi en 1560¹, indique que de nombreux géomètres avant Euclide avaient donné des *Éléments*. Il cite Hippocrate de Chios, Theudius de Magnésie, Eudoxe et Thaétète. D'après Proclus, Euclide doit beaucoup à Eudoxe et perfectionna les travaux de Thaétète.

Au quatrième siècle, Théon d'Alexandrie donne une version des *Éléments* modifiée pour en augmenter la clarté. Tous les manuscrits des

1. *In primum Eyclidis Elementorum librum commentariorum ad universam mathematicam disciplinam principium eruditionis tradentium libri III.*