CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS & RAPPELS FONDAMENTAUX

Il est nécessaire, pour bien comprendre le choix des structures des machines tournantes, et le rôle des circuits magnétiques qui y sont associés, de maîtriser quelque peu les équations de l'électromagnétisme. En effet, à l'instar de tout dispositif électrique, le principe de fonctionnement des machines tournantes repose essentiellement sur les équations de maxwell. Celles-ci sont utilisées soit sous la forme intégrale, lorsque la configuration du circuit possède une symétrie simple, soit sous la forme locale quand il n'est pas possible de déterminer aisément la distribution du champ. Dans ce dernier cas de figure, des méthodes numériques peuvent être utilisées.
Notons que le principe de fonctionnement des machines est relativement simple, seule l'application concrète donne lieu à des calculs parfois fastidieux.
Ce chapitre a pour principal objectif de rappeler les lois fondamentales de l'électromagnétisme dans le sens le plus général, puis d'en appliquer quelques unes aux machines tournantes.
De plus, les notions de base de l'entraînement électrique sont abordées en fin de chapitre afin d'établir les conditions de fonctionnement d'un dispositif tournant : cette dernière partie est fondamentale pour comprendre le choix de certains types de moteurs en fonction de la charge entraînée.

1 ÉQUATIONS DE BASE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

1.1 Les relations constitutives

Lorsqu'on impose un champ électrique ou magnétique extérieur à un matériau, il peut se créer, selon les molécules le constituant, un champ local microscopique qui, par ses effets, conduit à un comportement macroscopique global caractéristique, permettant de classifier le matériau selon sa réponse.
C'est la raison pour laquelle, dans le domaine de l'électromagnétisme, les physiciens ont été naturellement amenés à définir cinq grandeurs vectorielles ($\vec{B}$ (induction magnétique), $\vec{H}$ (excitation magnétique ou champ magnétique), $\vec{D}$ (induction électrique), $\vec{E}$ (champ électrique) et $\vec{J}_c$ (densité du courant de conduction)), dont les rapports respectifs illustrent le comportement macroscopique du matériau.
Ces vecteurs dépendent donc du milieu matériel dans lequel se trouve le champ électromagnétique, et sont liés, par ailleurs, entre eux, par des équations aux dérivées partielles : les équations de Maxwell.
En fonction de son comportement moléculaire, on caractérise un milieu par sa *perméabilité*, sa *permittivité,* ainsi que sa *conductivité*.
On a alors les relations constitutives suivantes :

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\, \mu_r\vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\, \varepsilon_r\vec{E} \;\text{ et }\; \vec{J}_c = \gamma\vec{E}$$

Avec :

$\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ H/m : perméabilité du vide μ_r : perméabilité relative du matériau
$\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}$ F/m: permittivité du vide ε_r : permittivité relative du matériau
γ = conductivité du matériau en siemens par m (S/m), définie aussi comme étant l'inverse de la résistivité ρ du matériau : $\gamma = 1/\rho$.

Rappelons la relation entre la densité de courant $\vec{J}_c$ et le courant de conduction I_c, à travers un conducteur de section S :

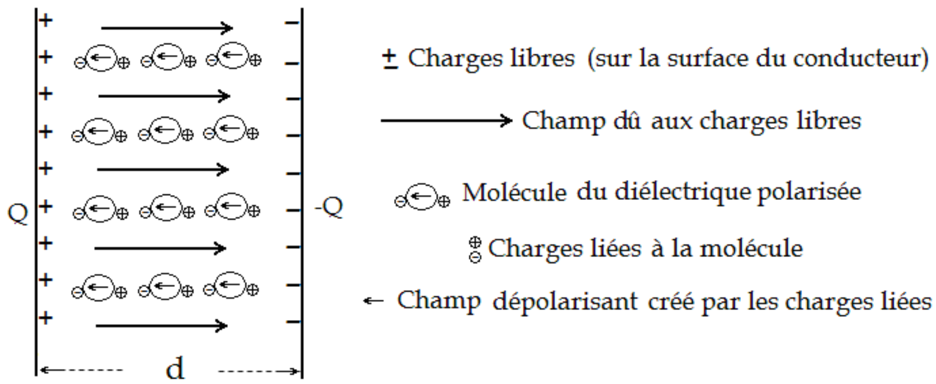
$$I_c = \iint_S \vec{J}_c . d\vec{S}$$

Remarque

Ces relations caractérisent le comportement électrique des matériaux et ne sont donc pas des lois physiques, au même titre que les équations de Maxwell. La plupart du temps, ces relations proviennent de mesures de caractérisation des matériaux.

- ***Permittivité et champ électrique***

Le rapport entre l'induction électrique $\vec{D}$ et le champ $\vec{E}$, illustré par la permittivité absolue ε, est lié à la *polarisabilité* du milieu. Celle-ci est associée aux charges dites *liées*, ainsi désignées parce qu'elles sont rattachées à la molécule ainsi polarisée, par opposition aux charges dites *libres,* qui sont libres de se déplacer dans la matière.
La polarisation d'un milieu assure la création d'un champ local (moment dipolaire) au niveau moléculaire qui se superpose au champ extérieur.
Si on prend, par exemple, le cas simple d'un condensateur plan possédant une charge Q et -Q sur chacune des armatures, distantes de d (figure ci-dessous), la polarisation se manifeste par une diminution du champ global qui existait *avant* l'introduction du matériau. Cette diminution, due au champ dépolarisant du matériau, conduit à une diminution de la différence de potentiel ΔV inter-armatures $\Delta V = E.d$.
Ceci a pour conséquence une augmentation de la capacité $C = Q/\Delta V$ du condensateur.
Il s'agit, dans cet exemple, d'une situation où les charges Q et –Q déposées sur chacune des armatures métalliques sont constantes.



Plus couramment, on peut imaginer que ce soit la *tension* ΔV qui soit maintenue constante grâce une source de tension.
La tension étant imposée, le champ résultant reste constant : cela se traduit par un apport plus important de charges fournies par la source sur la surface du conducteur lors de

l'introduction du diélectrique : on voit bien que, dans ces conditions, la capacité $C=Q/\Delta V$ est augmentée puisque ΔV reste constant tandis que Q augmente.
Lorsque, pour une faible excitation, la polarisation est intense, cela signifie que la permittivité relative est élevée : cette propriété est utilisée pour réaliser des capacités de faible encombrement. On peut renforcer ainsi, par exemple, de manière plus avantageuse, l'énergie réactive fournie à un circuit électrique.
Notons que le champ résultant à l'intérieur d'un diélectrique ne donne lieu à aucune consommation active, sauf s'il existe un retard entre l'excitation extérieure $\vec{E}$ et la réponse illustrée par $\vec{D}$. La fréquence joue donc un rôle dans le comportement du matériau lorsque le champ est alternatif, car elle peut conduire à un échauffement.
Par ailleurs, il faut bien faire la distinction entre les deux phénomènes de *polarisation,* associée à la permittivité, et d'*ionisation* associée à la conductivité. Ainsi, si les charges sont des charges liées, on parle d'un courant de *déplacement* ($\vec{J}_d = \partial\vec{D}/\partial t$, voir 1e équation de maxwell). Au contraire, si les charges sont libres et sont donc dissociées de la molécule, il s'agit d'un phénomène de conduction ($\vec{J}_c = \gamma\vec{E}$).
D'une manière générale, la permittivité des isolants (tableau ci-dessous) ne dépasse pas la dizaine d'unités, excepté pour les matériaux ferroélectriques, qui possèdent des analogies remarquables avec les matériaux ferromagnétiques (prochains paragraphes).

Matériau	Air	Téflon	Huile	Nylon	Porcelaine	Mica	Verre	Eau
ε_r	1,0006	2,1	2,4	3,5	6,0	6,0	5 à 10	80,0

- ***Perméabilité et champ magnétique***

Le rapport entre l'induction et l'excitation magnétique dans un milieu est défini comme étant la perméabilité absolue, notée μ. Comme les molécules peuvent développer une polarisation moyenne sous l'influence d'un champ électrique, elles peuvent aussi développer un moment dipolaire magnétique moyen sous l'effet d'un champ magnétique externe. Les dipôles magnétiques créés, à l'échelle moléculaire, se superposent alors au champ extérieur. Cela conduit à une valeur plus ou moins élevée de la perméabilité relative μ_r. Lorsque, pour une faible excitation, la polarisation magnétique est intense, cela signifie que la perméabilité relative est élevée. Celle-ci exprime la capacité du matériau à *conduire* le flux magnétique. On dira alors que perméabilité magnétique est à l'induction ce que la conductibilité électrique est à la conduction.
En réalité, peu de matériaux possèdent une perméabilité élevée : seuls le fer, le Cobalt, le Nickel et leurs alliages sont capables de s'aimanter fortement, même pour une faible excitation. On leur a donné le nom de *ferromagnétiques*.
Par exemple, si on étudie un électro-aimant avec et sans noyau ferromagnétique, l'induction obtenue est (approximativement) μ_r fois plus élevée en présence du noyau, si on maintient le même courant. Cela sous entend que, pour un faible courant, on peut obtenir de grandes inductions : c'est, du reste, très pratique, pour *convertir* l'énergie.
Il faut noter que la perméabilité des matériaux ferromagnétiques est si élevée (tableau ci-dessous) qu'on peut la considérer parfois comme infinie dans des circuits comportant un entrefer plus ou moins important : l'effet de ce dernier est alors prépondérant.
Ainsi, les calculs de champ peuvent être effectués en négligeant la circulation de H dans les matériaux magnétiques, ce qui revient à supposer que H y est nul, ou bien à ce que la perméabilité soit infinie (B restant fini pour vérifier la conservation du flux, voir 2e équation de Maxwell).

Lorsque l'induction devient trop importante dans un matériau (maximum de 2,2 Teslas pour les meilleurs), un phénomène de saturation apparaît qui limite l'accroissement de B (la question est approfondie dans les prochains paragraphes).
Notons, pour finir, qu'il est impossible de construire une machine sans l'apport des matériaux ferromagnétiques (ou magnétiques), car la conversion de l'énergie exige des champs élevés (forces de Laplace, fem induite etc.), qui ne peuvent être fournis que par ce type de matériaux pour que le rendement soit acceptable.

Matériau	Air	Fer (Permaloy 45)	Mumetal	Ferrite (3C3)	Ferrite (3B7 et 3B9)	Ferrite (3D3)	Ferrite (4C4)
μ_r	1	2700 à 23000	2.10^4 à 10^5	2200	2300	750	125

- ***Conductivité et champ électrique***

Par définition, un conducteur contient une grande quantité de charges *libres*. Ces charges sont constituées d'électrons qui, par leur faible couplage aux atomes auxquels ils appartiennent, peuvent passer d'atomes en atomes. En l'absence de tout champ extérieur, ces charges libres sont animées d'un mouvement au hasard qui, globalement, ne se traduit pas par une circulation ordonnée et cohérente.
Par contre, si on impose un champ électrique extérieur, les charges sont animées d'un mouvement global, donnant lieu à un courant plus ou moins intense selon le flux d'électrons considéré. Cela se traduit par un *échauffement* du matériau.
D'une manière plus générale, les charges responsables du phénomène de conduction dans un matériau quelconque ne sont pas forcément des électrons : les porteurs de charges peuvent être aussi des anions ou des cations.
Aussi, même les isolants (ou diélectriques) les plus parfaits, possèdent toujours une conductivité résiduelle plus ou moins élevée, suivant la composition, la pureté ou les conditions d'application du champ extérieur.
Un échauffement est alors observé, en courant continu.
Ci-dessous la résistivité de quelques métaux à la température de 20°C:

Matériau	Aluminium	Argent	Cuivre	Fer	Mercure	Platine	Or
ρ ($\Omega.mm^2/m$)	0,028	0,0163	0,018	0,12	0,96	0,098	0,022

- ***Complément***

Dans la réalité, les propriétés des matériaux peuvent être plus complexes que ce qui a été décrit précédemment. Par exemple, si une machine travaille en régime sinusoïdal, la mesure de la résistance d'un enroulement en courant continu ne donne pas forcément la valeur réelle équivalente en sinusoïdal.
Ainsi, la résistance présentée en régime sinusoïdal, lorsqu'on a affaire à de gros conducteurs est *plus élevée* qu'en continu en raison de l'effet de *peau* (annexe 6). Il s'agit d'un phénomène qui rend la densité de courant non uniforme à travers la section du conducteur. Elle y est plus élevée dans les zones les plus proches de la surface extérieure au conducteur : il s'agit donc d'en tenir compte par un facteur de correction.
Ceci montre que la maitrise exacte du comportement des matériaux n'est pas aisée. On peut citer plusieurs situations où il s'agit de prendre en compte différents phénomènes complexes :

- ***anisotropie (diélectrique et magnétique)***

Certains matériaux diélectriques ne présentent pas la même valeur de permittivité (resp. perméabilité) suivant toutes les directions. C'est souvent le cas du verre, dont la permittivité dépend du *sens* de l'application du champ extérieur.
C'est aussi le cas des matériaux ferromagnétiques, utilisés sous forme de tôles de faible épaisseur dans les machines.

- ***non linéarité***

Il s'agit d'un phénomène très courant et qui touche tous les matériaux ferromagnétiques. Il existe rarement une linéarité entre B et H. La perméabilité n'est donc quasiment jamais constante. Cela est d'autant plus vrai que la plupart des machines travaillent dans la zone de saturation, donc dans la zone la moins linéaire.
Le même phénomène peut être observé pour les matériaux ferroélectriques, ainsi nommés parce qu'ils présentent de grandes similitudes avec les matériaux ferromagnétiques, à savoir une permittivité très élevée, associée à une non-linéarité de la caractéristique D-E.

- ***Réponse non instantanée***

Les matériaux diélectriques et magnétiques, *même linéaire*, peuvent présenter un décalage temporel entre l'*excitation* ($\vec{E}, \vec{H}$) et la *réponse* ($\vec{D}, \vec{B}$). Il s'agit du phénomène d'hystérésis (magnétique ou électrique) qui conduit, pour les fonctionnements en régime alternatif, à des pertes se développant dans le matériau. Ce phénomène est dû à la relaxation dipolaire des molécules constituant le matériau considéré, c'est-à-dire à un *retard* entre l'excitation et la réponse.
Notons que cet échauffement se *superpose* généralement à celui dû à l'échauffement par effet Joule. Il faut donc, dans tous les cas, dans un régime variable, distinguer *l'hystérésis* du simple phénomène de *conduction*.

- ***Limite dans l'utilisation des matériaux***

Exemple : une température au dessus de la température de Curie (770°C) est celle pour laquelle les matériaux magnétiques perdent toute propriété magnétique.
Par ailleurs, les matériaux diélectriques présentent un champ électrique limite au dessus duquel ils perdent leur caractère isolant. Il s'agit du champ critique qui dépend de la nature du matériau. Par exemple, l'air est un bon isolant mais devient conducteur si le champ atteint la valeur critique d'environ 30 kV/cm.

- ***Variation des propriétés en fonction d'autres grandeurs***

La température de fonctionnement d'un dispositif peut influer considérablement sur la conductivité électrique, et donc sur la résistance apparente présentée. En fonction de la nature du matériau conducteur (cuivre, aluminium, laiton, etc.), un écart entre deux températures extrêmes peut changer considérablement la valeur de la résistance présentée. En effet, la loi de Mathiessen prévoit, pour une température T une correction plus ou moins importante selon le matériau, illustrée par la valeur du coefficient de température α :

$$\rho_{(T)} = \rho_{(20^\circ C)} \left[1 + \alpha (T - 20)\right]$$

Par exemple, le coefficient de température du cuivre α_{Cu} est de 4.10^{-3} [°C^{-1}].
Cela signifie que la résistance d'un conducteur peut être multipliée par 1,5 si la température passe de 20 à 145°C. Il s'agit donc d'en tenir compte pour, par exemple, la modélisation, en majorant la résistance relevée à température ambiante.
L'application d'un champ élevé peut conduire à l'ionisation des molécules, qui renforce le flux de porteurs de charges et par la même la *conductivité*.
La *fréquence* influe sur la *permittivité*. En effet, puisque la permittivité est liée à la relaxation dipolaire, la rapidité (ou la fréquence) de variation du champ appliqué a forcément une influence sur le comportement moléculaire du matériau. Par exemple, L'eau a une permittivité de 80 à basse fréquence, et aux très hautes fréquences (optique) une permittivité de 1,8.
En résumé, les quelques exemples traités ci-dessus montrent que, finalement, la caractérisation d'un matériau doit se faire de manière à tenir compte de l'ensemble des contraintes appliquées. Cette prise en compte n'est pas toujours aisée et conduit même parfois à des calculs fastidieux comme, par exemple, le calcul de la résistance d'un conducteur soumis à un courant alternatif (effet de peau, voir annexe 6).
Heureusement, dans la plupart des cas, la section des fils conducteurs utilisés dans les dispositifs électrique est suffisamment faible pour négliger ce phénomène.
Notons qu'il existe des exemples où le phénomène est non seulement incontournable, mais *avantageux* : c'est le cas des conducteurs rotoriques des machines asynchrones à rotors à cage, où la section élevée des barres rotoriques, permet un démarrage *naturel* de la machine (chapitre III).

1.2 Les équations de Maxwell

Les phénomènes électriques et magnétiques ont été observés et remarquablement analysés par plusieurs physiciens de renom (Franklin, Coulomb, Oersted, Ampère, Gauss, Faraday, Lenz…). C'est cependant à Maxwell que l'on doit la formulation la plus complète des relations liant entre elles les grandeurs électriques et magnétiques.
Il s'agit des équations fondamentales pour tout électricien.
Appliquées sous leur forme locale, elles conduisent le plus souvent à des équations différentielles qui, une fois résolues, permettent de connaître le champ électromagnétique en tout point de l'espace. Heureusement, on peut les utiliser sous leur forme intégrale, dans de nombreux cas pratiques, quand la simplicité du circuit le permet.
On rappelle les quatre équations de Maxwell :

$$\begin{cases}
\overbrace{\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}_t = \vec{J}_c + \vec{J}_d}^{\text{Forme locale}} & \Leftrightarrow \quad \overbrace{\oint_C \vec{H}.d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{n} I_i}^{\text{Forme intégrale}} \quad \text{Théorème d'Ampère} \\
\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 & \Leftrightarrow \quad \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0 \quad \text{Théorème de conservation du flux} \\
\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \Leftrightarrow \quad e = -\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{Loi de Lenz (fem induite)} \\
\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{libre} & \Leftrightarrow \quad \oiint_S \vec{D}.d\vec{S} = Q_{int} \quad \text{Théorème de Gauss}
\end{cases}$$

Chacune des équations est développée dans les paragraphes suivants.

- ***Première équation de maxwell : Théorème d'Ampère***

Il s'agit d'une des relations la plus utilisée en électrotechnique.
Si elle a été établie par Ampère pour les courants de conduction, Maxwell a montré qu'elle concerne aussi les courants de déplacement en régimes variables. On a donc, en général :

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_t = \vec{J}_c + \vec{J}_d$$

Le 1[e] terme de droite de l'équation représente la densité de courant de *conduction* $\vec{J}_c$ et est lié au champ électrique $\vec{E}$ et à la conductivité γ du milieu. Il s'exprime, ainsi qu'il a été défini précédemment, comme :

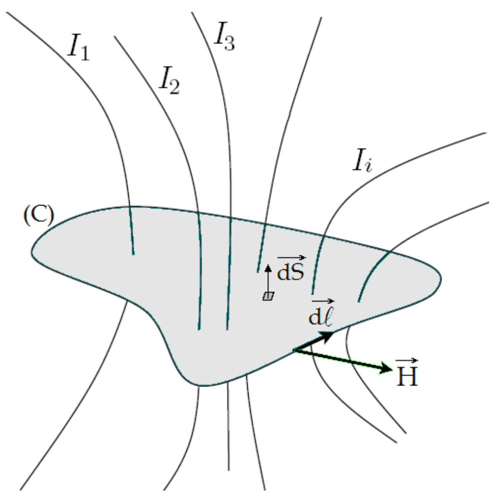
$$\vec{J}_c = \gamma\vec{E}.$$

Le 2[e] terme de droite représente le courant de *déplacement* $\vec{J}_d$ et est également lié au champ $\vec{E}$, et à la permittivité ε du milieu. Il s'exprime comme :

$$\vec{J}_d = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

D'une manière générale, la somme des deux courants $\vec{J}_c + \vec{J}_d$ constitue le courant total $\vec{J}_t$.
Dans le cas où on a affaire à des *conducteurs* alimentés à des fréquences basses (par exemple à la fréquence industrielle de 50 Hz), un simple calcul permet de montrer que le courant de conduction est très nettement supérieur au courant de déplacement et le terme $\partial\vec{D}/\partial t$ peut être négligé.
Par contre, dans le cas des *diélectriques*, c'est la conductivité qui devient négligeable, on alors affaire à un courant de déplacement.
Dans la plupart des situations, il est toujours possible de négliger un terme par rapport à l'autre, selon le milieu dans lequel on est : il ne faut cependant pas oublier que, dans les cas des fréquences très élevées, *les deux courants* peuvent coexister si, par exemple, le produit $\omega\varepsilon$ devient assez élevé pour être du même ordre de grandeur que la conductivité γ.
Dans le domaine des machines tournantes, ce sont les courants de *conduction* qui permettent de créer un champ magnétique à l'intérieur de la machine (principalement dans son entrefer). On a alors $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}_c$, qu'on peut transformer grâce au théorème de Stockes (annexe 1) :

$$\left\{\begin{array}{lll} \underbrace{\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{H}.\,d\vec{S}} = & \underbrace{\oint_C \vec{H}.d\vec{\ell}} & \text{(Théorème de Stockes)} \\ \quad\Downarrow & \quad\Downarrow & \\ \underbrace{\iint_S \vec{J}_c.\,d\vec{S}} = & \underbrace{\oint_C \vec{H}.d\vec{\ell}} & \\ \quad\Downarrow & \quad\Downarrow & \\ \sum_{i=1}^{n} I_i = & \oint_C \vec{H}.d\vec{\ell} & \text{(Théorème d'Ampère)} \end{array}\right.$$



C étant le contour fermé qui délimite la surface considérée S (figure ci-contre).

On retrouve finalement le théorème d'Ampère :

'La circulation du vecteur champ d'excitation magnétique le long d'un contour fermé (C) orienté par sa normale (règle du tire-bouchon) est la somme algébrique des courants traversant la surface s'appuyant sur le contour(C)'.

- ***Deuxième équation de maxwell : Théorème de conservation du flux***

Le flux de l'induction magnétique à travers une surface S donnée, possède des propriétés conservatives. En effet, on définit le flux magnétique ϕ comme :

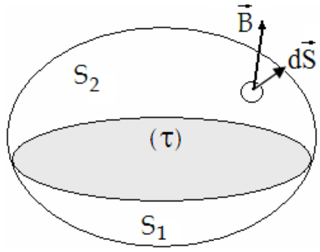
$$\phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

La conservation du flux peut être exprimée par la deuxième équation de Maxwell sous sa forme locale:

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

On peut retrouver le théorème de conservation en utilisant le théorème d'Ostrogradsky-Gauss (annexe1), en prenant une surface fermée S qui englobe le volume τ (figure ci-dessous):

$$\begin{cases} \underbrace{\iiint_\tau \mathrm{div}\vec{B}.d\tau}_{\Downarrow} = \underbrace{\oiint_S \vec{B}.d\vec{S}}_{\Downarrow} \quad \text{(Théorème d'Ostrogradsky - Gauss)} \\ \quad 0 \quad = \oiint_S d\phi \quad \text{(Théorème de conservation du flux)} \end{cases}$$



Si on scinde la surface S en deux surfaces S_1 et S_2, on écrit alors :

$$\underbrace{\iint_{S_1} \vec{B}.d\vec{S}}_{\textit{flux entrant}} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{B}.d\vec{S}}_{\textit{flux sortant}} = 0$$

Cette dernière équation exprime que *le flux qui rentre = flux qui sort* : il y a conservation du flux magnétique, exactement comme il y a conservation du courant électrique dans un conducteur de section S, où la relation $\oiint_S \vec{J}_c d\vec{S} = 0$, exprime la loi des nœuds dans un circuit électrique.

Le flux magnétique possède donc la propriété d'être conservatif, contrairement au flux électrique (électrostatique), en présence de charges (quatrième équation de Maxwell). Bien sûr, cela sous entend qu'il n'existe pas de charge magnétique, ie, pas de nord sans sud, (alors qu'on peut très bien séparer les charges électriques positives des négatives).

- ***Troisième équation de maxwell. Loi de Lenz-Faraday***

A partir de la troisième équation de Maxwell sous sa forme locale : $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on peut, en utilisant le théorème de Stockes, retrouver la loi de Lenz - Faraday: