Rappels de cours

1. Bases de calcul

- ***Critères de divisibilité***

(i) Critère de divisibilité par 2

Un nombre entier est divisible par 2 lorsqu'il est pair.
Un nombre entier est divisible par 2 lorsque son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

(ii) Critère de divisibilité par 3

Un nombre entier est divisible par 3 lorsque la somme des chiffres qui composent son écriture est divisible par 3.

(iii) Critère de divisibilité par 4

Un nombre entier est divisible par 4 lorsque le nombre formé par les deux derniers chiffres de son écriture est divisible par 4.

(iv) Critère de divisibilité par 5

Un nombre entier est divisible par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.

(v) Critère de divisibilité par 6

Un nombre entier est divisible par 6 lorsqu'il est divisible à la fois par 2 et par 3.

(vi) Critère de divisibilité par 8

Un nombre entier est divisible par 8 lorsque le nombre formé par ses 3 derniers chiffres est divisible par 8.

(vii) Critère de divisibilité par 9

Un nombre entier est divisible par 9 lorsque la somme des chiffres qui composent son écriture est divisible par 9.

(viii) Critère de divisibilité par 10

Un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

(ix) Critère de divisibilité par 11

Pour déterminer si un nombre N est divisible par 11 :

- on calcule la somme A des chiffres en position impaire.
- on calcule la somme B des chiffres en position paire.

N est divisible par 11 si et seulement si la différence A – B (ou B – A) est divisible par 11.
Cela revient à effectuer la somme alternée de ses chiffres.

(x) Critère de divisibilité par 12

Un nombre entier est divisible par 12 lorsqu'il est divisible à la fois par 3 et par 4.

(xi) Critère de divisibilité par 15

Un nombre entier est divisible par 15 lorsqu'il est divisible à la fois par 3 et par 5.

(xii) Critère de divisibilité par 20

Un nombre entier est divisible par 20 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00 20 40 60 80

(xiii) Critère de divisibilité par 25

Un nombre est divisible par 25 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00 25 50 75

(xiv) Critère de divisibilité par 50

Un nombre entier est divisible par 50 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00 50

(xv) Critère de divisibilité par 100

Un nombre entier est divisible par 100 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00

➨ ***Astuces pour le calcul mental***

(i) Multiplication par 5

Pour multiplier un nombre par 5, il suffit de rajouter 0 à droite et de diviser ensuite par 2.

(ii) Multiplication par 11

Pour multiplier un nombre à deux chiffres par 11, il suffit de placer la somme de ces deux chiffres entre eux-mêmes. Cette règle reste valable tant que cette somme reste inférieure ou égale à 9.

Exemple : 42×11=462

(iii) Carré d'un nombre finissant par 5

Pour calculer le carré d'un tel nombre, il suffit de prendre le nombre constitué de la suppression du chiffre des unités (en l'occurrence le 5), le multiplier par l'entier successif, ensuite par cent et rajouter 25 au nombre obtenu.

Exemple : $85^2 = 8 \times 9 \times 100 + 25 = 7225$

(iv) Utilisation des identités remarquables

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemple : $27 \times 33 = (30-3)(30+3) = 30^2 - 3^2 = 900 - 9 = 891$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemple : $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 3 + 3^2 = 529$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemple : $28^2 = (30-2)^2 = 30^2 - 2 \times 30 \times 2 + 2^2 = 784$

➨ ***Règles de calcul littéral***

(i) Puissances

$$A^n \times B^n = (A \times B)^n \qquad A^n \times A^m = A^{n+m}$$

$$(A^n)^m = A^{n \times m}$$

$$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m} \qquad \frac{A^n}{B^n} = (\frac{A}{B})^n$$

(ii) Racines carrées

Pour a et b réels positifs, n entier relatif :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{a}^2 = a \qquad \sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$$

Attention !

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

(iii) Les identités remarquables

Pour a et b réels :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

➨ ***Pourcentage***

Situation	***Application linéaire associée***	***Exemple***
Prendre ***t***% d'une quantité ***x***	$\frac{\boldsymbol{t}}{100} \times \boldsymbol{x}$	12% de ***x,*** c'est 0,12***x***
Augmentation d'une quantité **x** de ***t%***	$(1 + \frac{\boldsymbol{t}}{100}) \times \boldsymbol{x}$	Si ***x*** augmente de 45%, il devient 1,45***x***
Diminution d'une quantité **x** de ***t%***	$(1 - \frac{\boldsymbol{t}}{100}) \times \boldsymbol{x}$	Si ***x*** diminue de 25%, il devient 0,45***x***
Taux de variation d'une quantité	$\frac{valeur\ finale - valeur\ initiale}{valeur\ initiale}$	Une valeur qui passe de 20 à 15, diminue de 25%

ATTENTION !

- Une baisse de x% n'est pas compensée par une hausse de x% !

Exemple : Un objet à 1000€ qui baisse de 10% coûte 900€, puis s'il augmente de 10% il coûte 990€.

En revanche si une augmentation est de la forme de 1/p, la compensation est de la forme de 1/(p+1). Et vice-versa, si la baisse est de la forme de 1/p, cette fois-ci la compensation est de la forme de 1/(p-1).
Exemple 1 : Un objet à 200€ qui augmente de 50% (donc de 1/2) coûte 300€, puis s'il baisse de 33% (donc de 1/3), il revient à son prix initial de 200€.

Exemple 2 : Un objet à 150€ qui diminue de 33% (donc de $\frac{1}{3}$) coûte 100€, puis s'il augmente de 50% (donc de $\frac{1}{2}$) il revient à son prix initial de 150€.

- Deux variations successives de x% et de y% ne sont pas équivalentes à une variation totale de (x+y)% !

Exemple : Si un objet dont le prix à 100€ augmente de 10%, il vaudra 110€. Et s'il ré-augmente de 20% il passera à 132€. Ainsi son taux de variation sera de 32% et non pas de (20+10)%.

2. Système de deux équations à deux inconnues

Un système (n, n) est un couplage de n équations à n inconnues. Lorsque ces équations sont toutes linéaires, le système est aussi dit linéaire. Nous nous intéresserons uniquement aux systèmes linéaires dans le cas où n=2. Ainsi un système linéaire de deux équations linéaires à deux inconnues est de la forme :

$$ax + by = c$$
$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

On définit le déterminant du système par :

$$\Delta = a\beta - \alpha b.$$

On admettra que le système possède des solutions uniques si et seulement si $\Delta \neq 0$.

La résolution de ce système passe par deux méthodes : dans chaque cas, on supposera que le déterminant du système est non-nul, et donc qu'il y a un unique couple de solution.
Néanmoins, on rappelle que si le déterminant est nul, c'est que le système est lié : c'est-à-dire qu'une équation est en fait un multiple de l'autre (sauf terme de droite). Dans ce cas, si les deux équations sont strictement les mêmes, il y a une infinité de solutions. Mais si on a par exemple :

$$ax + by = c$$
$$ax + ay = \gamma$$

Avec $c \neq \gamma$, alors le système n'a aucune solution.

(i) Substitution

Cette méthode consiste à exprimer à l'aide de l'une des deux équations, une variable en fonction de l'autre (par exemple x en fonction de y) et de l'injecter ensuite dans la deuxième équation pour se ramener ainsi à une équation à une inconnue. Les deux équations deviennent :

$$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y \quad \text{et} \quad \alpha x + \beta y = \gamma$$

En injectant dans a deuxième équation :

$$\alpha(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y) + \beta y = \gamma$$

Ainsi on s'est ramené à une équation à une seule inconnue y, que l'on résout sans problème. On remplace ensuite dans la première équation y par la valeur trouvée, et on finit de déterminer x.

(ii) Combinaison

L'idée est de trouver une combinaison linéaire simple entre les deux équations du système et qui fasse disparaître une des deux inconnues.
Considérons toujours le même système :

$$\begin{array}{c}(1)\ ax + by = c\\ (2)\ \alpha x + \beta y = \gamma\end{array}$$

On va commencer par éliminer d'abord la variable y. Pour cela multiplions l'équation (1) par β et l'équation (2) par b.

$$\begin{array}{ll}(1) \times \beta & \beta a x + \beta b y = c\beta\\ (2) \times b & b\alpha x + \beta b y = b\gamma\end{array}$$

Effectuons à présent l'opération $(1) \times \beta - (2) \times b$:

$$(a\beta - b\alpha)x = c\beta - b\gamma$$

Ainsi :

$$x = \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - b\alpha}$$

En multipliant cette fois l'équation (1) par α et l'équation (2) par a, on trouve pour y :

$$y = \frac{a\gamma - \alpha c}{a\beta - b\alpha}$$

(iii) Déterminant

On admettra les résultats suivants :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{b\gamma - c\beta}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a\gamma - c\alpha}{\Delta}$$

3. Vitesse et débit

(i) Vitesses, distances et temps

La vitesse est la mesure d'une distance parcourue par unité de temps.
Un mobile ayant une vitesse moyenne V, parcourt une distance D pendant une durée T. Ainsi :

$$V = D/T$$

La vitesse est donnée en kilomètre/heure (km/h) ou bien en mètre/seconde (m/s). Il est donc très utile de bien maîtriser avec les conversions de temps et de distances.

1 heure = 60 minutes = 3600 secondes
1 kilomètre = 1000 mètres

Dans cette épreuve de calcul, certains types d'exercices reviennent de façon systématique, notamment ceux concernant le rattrapage et le croisement de deux mobiles. Nous allons traiter ces deux cas de façon générale.

Croisement de deux mobiles :

Considérons deux mobiles M_1 et M_2 se lançant respectivement d'un point A et B, à une vitesse respectivement de v_1 et v_2 ,et ayant des trajectoires opposées. Le but est de trouver l'instant T et les distances d_1 et d_2 parcourues par M_1 et M_2 au moment du croisement. On note :

AB = d,
d_1 la distance parcourue par le mobile 1.
d_2 la distance parcourue par le mobile 2.

Ainsi :

$$d_1 = v_1 \times t$$

$$d_2 = v_2 \times t$$

Au moment du croisement :

$$d_1 = v_1 \times T \,;\, d_2 = v_2 \times T$$

$$d_1 + d_2 = d$$

On est ramené donc à résoudre un système de trois équations à trois inconnues dont les inconnues sont d_1 , d_2 et T, et dont les solutions sont :