## Exercices pratiques

1. Quelle est la différence entre le plus petit nombre à trois chiffres multiple de 13 et le plus petit nombre premier à trois chiffres ?

   A 1
   B 2
   C 4
   D 6
   E 8

2. Un nombre entier positif x est multiplié par 3. Le résultat divisé par 2 est encore un entier. Qu'est-ce qui doit être vrai ?

   A x est un nombre impair
   B $\frac{x}{2}$ est un nombre impair
   C x est un nombre pair
   D $\frac{x}{2}$ est un nombre pair
   E Aucun des énoncés ci-dessus

3. Jeanne, Marc et Delphine se donnent un rendez-vous pour faire du jogging. Sur le même parcours fermé, Jeanne tient le rythme d'un tour toutes les trois minutes ; Marc un tour toutes les 2 minutes et Delphine un tour toutes les 4 minutes. S'ils partent tous au même temps, après combien de minutes se retrouveront-ils tous ensemble au point de départ ?

   A 8
   B 9
   C 10
   D 11
   E 12

4. Parmi les valeurs ci-dessous laquelle ne peut pas être une différence de deux nombres premiers ?

   A 1
   B 3
   C 5

D 7
E 9

5. Combien de facteurs le nombre 210 possède-t-il ?

A 4
B 8
C 9
D 12
E 16

6. Dans la multiplication ci-dessous, a, b et c représentent des chiffres distincts non nuls. Parmi les valeurs suivantes, laquelle pourrait être une valeur de ce produit ?

$$\begin{array}{r} a\,b \\ \underline{\times\ a\,b} \\ c\,c\,b \end{array}$$

A 221
B 335
C 441
D 445
E 881

7. Si $N = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$, combien de nombres premiers y a-t-il entre $N + 2$ et $N + 10$ ?

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

8. Si a et b sont des entiers non nuls tels que $a + b = 1$, alors que peut-on dire de ab ?

A ab est positif impair
B ab est négatif impair
C ab est positif pair
D ab est négatif pair
E ab est 0

**9.** Les nombres entiers x, y et z sont positifs et distincts. Laquelle des expressions suivantes ne peut pas être vraie ?

- **A** $x = y + z$
- **B** $x + y = z$
- **C** $x + y = z + y$
- **D** $x + z = z + 1$
- **E** $x + 1 = y + z$

**10.** Si p, q et r sont des nombres entiers positifs tels que divisés par 8 leur reste vaut 5, quel est le reste de la division de $p \times q \times r$ par 8 ?

- **A** 1
- **B** 3
- **C** 5
- **D** 7
- **E** impossible à déterminer

# Explications pour les exercices pratiques

## 1. Réponse : E

**Explication :** Il faut identifier les deux nombres dont on parle. Le plus petit multiple de 13 à trois chiffres est 104, car 70 + 39 = 109, et 70 et 39 sont deux multiples de 13. Celui qui précède 109 est 70 + 26 qui n'a que deux chiffres, car il est inférieur à 100. Le plus petit nombre premier à trois chiffres est 101, car 100 n'est évidemment pas premier et 101 n'est divisible ni par 2, ni par 3 (la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3), ni par 5, ni par 7 car le reste de la division par 7 n'est pas nul. La différence est donc 109 – 101 = 8.

La réponse est (E).

## 2. Réponse : D

**Explication :** Pour que 3x divisé par deux soit un entier, il faut que 3x soit pair, et donc, que x lui-même soit pair, car si x était impair, 3x serait également impair. Si x est un nombre pair, alors $\frac{x}{2}$ est certainement un entier. Par contre $\frac{x}{2}$ pourrait être pair (par exemple si x = 4) ou impair (par exemple si x = 6). C'est qui doit être vrai est que x est un nombre pair.

Donc la bonne réponse est (D).

## 3. Réponse : E

**Explication :** Le nombre de minutes correspondant au temps écoulé entre le départ et le moment où les trois coureurs se retrouvent ensemble doit être un multiple de 2, de 3 et de 4. Seulement de cette manière Jeanne, Marc et Delphine auront accompli chacun un nombre entier de tours complets se retrouvant tous au même point de départ. La première fois que cela peut arriver correspond à un temps écoulé en minutes égal au PPCM (2, 3, 4) = 12. Il se rencontre donc après 12 minutes.

La réponse est donc (E).

## 4. Réponse : D

**Explication :** Les nombres proposés sont tous des nombres impairs, donc ils peuvent être obtenus seulement comme différence entre un nombre impair et un nombre pair. Puisqu'il y a seulement un nombre premier pair, le 2, en prenant les différents nombres premiers possibles qui suivent le 2, on a : 3 – 2 = 1 ; 5 – 2 = 3 ; 7 – 2 = 5 ; 11 – 2 = 9. Il n'est pas possible d'obtenir 7 comme différence de deux nombres premiers.

La réponse est (D).

**5. Réponse : E**

**Explication :** Notez que $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. A part le facteur « 1 », chaque facteur de 210 est un produit de facteurs choisis parmi 2, 3, 5 et 7. Pour former un facteur on peut donc choisir de prendre ou ne pas prendre le facteur premier 2 ; on peut choisir de prendre ou ne pas prendre le facteur premier 3 ; on peut choisir de prendre ou ne pas prendre le facteur premier 5 ; on peut choisir de prendre ou ne pas prendre le facteur premier 7. Le nombre total de facteurs possibles s'obtient en multipliant le nombres de choix qu'on a à chaque pas. Il est donc égal donc à $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

La réponse est (E).

**6. Réponse : C**

**Explication :** Le nombre qui s'écrit avec les chiffres « ccb » doit être un carré, car il s'obtient un multipliant ab par lui-même. Notez que b ne peut qu'être 1 ou 5 car b est non nul et il est non seulement le chiffre des unités de ab, mais aussi de son carré. Or parmi les options proposées, 221 n'est pas un carré, car $14 \times 14 = 196$ et $15 \times 15 = 225$. Le nombre « ccb » pourrait être 225, mais celui-ci n'est pas proposé. Le nombre 335 n'est pas un carré, car $18 \times 18 = 324$ et $19 \times 19 = 361$. Si l'on continue, on s'aperçoit que $441 = 21 \times 21$ : 441 peut donc être une valeur du produit. Il est d'ailleurs évident que 445 et 881 ne sont pas des carrés, car le premier est trop proche de $21 \times 21$ et le second à mi chemin entre $29 \times 29 = 861$ et $30 \times 30 = 900$.

La réponse est donc (C).

**7. Réponse : A**

**Explication :** Le nombre N est un nombre pair. Donc $N + 2$ est pair ; pour tout k entre 3 et 7, $N + k$ est un multiple de k, car N est un multiple de k : la somme de deux multiples de k est encore un multiple de k. Il reste $N + 8$ qui est pair, comme du reste $N + 10$ ; le nombre $N + 9$ est un multiple de 9 : la raison est que N est un multiple de 9 car N est un multiple de $3 \times 6 = 18$. Donc aucun nombre entier entre $N + 2$ et $N + 10$ n'est un nombre premier. Notez qu'il n'a pas été nécessaire de travailler explicitement avec le nombre $N = 5\,040$.

La réponse est (A).

**8. Réponse : D**

**Explication** : On peux assumer que $a = -1$ et $b = 2$. Ceci donne un produit pair négatif. De manière générale puisque p et q doivent avoir comme somme un nombre impair, il faut que l'un soit pair et l'autre impair.
Pour le signe, puisque la somme est 1 et les nombres sont entiers non nuls, il ne peuvent pas être les deux positifs, car la somme serait au moins 2, ni les deux négatifs. Ils doivent forcément être l'un positif et l'un négatif, ce qui signifie que le produit doit être négatif.

La réponse est donc (D).

### 9. Réponse : C

**Explication** : Dans cette situation, il faut analyser toutes les possibilités jusqu'à en trouver une qui ne peut pas se vérifier. Si $x = 3$, $y = 1$, et $z = 2$, l'expression $x = y + z$ est possible. Avec $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$, l'expression $x + y = z$ est aussi possible. Pour que $x + y = z + y$, il faut nécessairement que $x = z$, ce qui contredit les hypothèses de départ selon lesquelles x, y et z sont distincts. On pourrait s'arrêter ici et conclure ici par la réponse (C), mais on examine aussi les deux possibilités restantes : $x + z = z + 1$ pourrait se vérifier pour $x = 1$, $z = 2$, et y quelconque ; $x + 1 = y + z$ peut se vérifier par exemple pour $x = 8$, $y = 5$, $z = 4$.

La réponse est donc (C).

### 10. Réponse : A

**Explication :** Si on assume que $p = 8a + 5$ ; $q = 8b + 5$ ; $r = 8c + 5$, on a : $pqr = (8a + 5)(8b + 5)(8c + 5)$.

Il n'est pas nécessaire de développer ce produit en entier. Il faut simplement réaliser qu'il se compose de 8 termes (le premier est 512abc) dont 7 sont tous des multiples de 8 et le huitième et dernier est $5 \times 5 \times 5 = 125$. Donc le reste de la division de pqr par 8 est le même que le reste de la division par 8 de 125. Or puisque $125 = 13 \times 8 + 1$, ce reste est 1.

La réponse est (A).

## 2. Fractions

Quand un nombre n'est pas entier, comme 0,5 ou 7,25, il est souvent le résultat de la division d'un nombre entier N par un nombre entier D : ainsi 0,5 = 1 ÷ 2 et 7,25 = 29 ÷ 4. Dans ces cas, il est possible d'exprimer de tels nombres comme fractions. Celles-ci s'expriment sous la forme $\frac{N}{D}$ où l'entier N est appelé **numérateur** et l'entier D est appelé **dénominateur**.

Une fraction peut aussi exprimer des entiers, si N est un multiple de D.

Deux fractions peuvent être équivalentes, c'est-à-dire exprimer le même nombre : par exemple $\frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{30}{100}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre entier on obtient une fraction équivalente.

On peut simplifier **une fraction** en divisant le numérateur et le dénominateur par un diviseur commun. On obtient aussi une fraction équivalente. Quand une fraction ne peut plus être simplifiée, elle est appelée irréductible.

Idéalement à partir d'une fraction on peut obtenir la fraction irréductible correspondante en divisant numérateur et dénominateur par leur PPDC. Mais si cela prend trop de temps, il est aussi possible commencer par diviser le numérateur et le dénominateur par un diviseur commun et itérer la procédure jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de simplifier la fraction ainsi obtenue.

**Q :** **Trouvez la fraction irréductible de $\frac{72}{48}$**

**R :** Le PPDC de 72 et 48 est 24. Donc en divisant par 24, on obtient : $\frac{72}{48} = \frac{3}{2}$.

Si vous estimez que le calcul du PPDC de 72 et 48 vous prend trop de temps, mais vous réalisez immédiatement que le nombre 12 est un diviseur commun, divisez 72 et 48 par 12 : vous obtenez ainsi la fraction équivalent $\frac{6}{4}$, qui peut être facilement réduite à $\frac{3}{2}$.

### Opérations avec les fractions

Pour effectuer une somme **ou une différence entre fractions**, il faut trouver des fractions équivalentes ayant toutes le **même dénominateur**. On se réduit alors à travailler avec les numérateurs ainsi obtenus. **Ceci reste vrai quand on doit effectuer une série de sommes et de différences.**

**Q :** **Calculez :** $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

**R :** Un dénominateur commun pourrait être 12.
On a alors : $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}$.

**Q :** **Calculez :** $\frac{3}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

**R :** Ici un dénominateur commun pourrait être 24.
Donc : $\frac{3}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{36}{24}-\frac{9}{24}+\frac{6}{24}-\frac{8}{24}=\frac{25}{24}$.

Notez que le dénominateur commun le plus efficace est en général le PPCM. Quand le calcul de celui-ci prend trop de temps on peut aussi utiliser un multiple commun quelconque, comme par exemple le produit des dénominateurs, quitte à simplifier ensuite le résultat obtenu.

Pour un produit de fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

**Q :** **Calculez :** $\frac{7}{4}\times\frac{3}{11}\times\frac{5}{2}$

**R :** Le produit des numérateurs est $7 \times 3 \times 5 = 105$. Le produit des dénominateurs est $4 \times 11 \times 2 = 88$, Le résultat est donc $\frac{105}{88}$.

**Q :** **Calculez :** $\frac{14}{25}\times\frac{5}{21}$

**R :** Si vous effectuez les multiplications des numérateurs et des dénominateurs vous obtenez $\frac{70}{525}$, qui se simplifie ensuite en $\frac{2}{15}$. Si vous simplifiez le produit, cela devient :