Chapitre I

Expérience aléatoire et événements

Sommaire

Ce chapitre a pour objet de préciser les notions d'expérience aléatoire, d'issues ou réalisations de ladite expérience ainsi que leur représentation au moyen de l'ensemble qui les réunit de façon exhaustive en donnant et en illustrant les définitions qui s'y rattachent.

La description ensembliste d'une expérience aléatoire constitue un préalable essentiel au concept d'événement aléatoire. Enfin, la définition de la *tribu des événements* permet de préciser la notion d'ensemble fondamental probabilisable.

1 Expérience aléatoire, exemple introductif

Comme cela a été dit dans le préambule, le contexte est celui des *phénomènes* ou *expériences aléatoires*. Afin d'illustrer les définitions qui constituent les bases de l'étude des expériences aléatoires, celles-ci sont données en référence à un exemple précis (exemple I.1).

D'autres exemples figurent dans la section« *Résumé* » (section 4 page 11) de ce chapitre et d'autres sont proposés à titre d'exercices (section 5 page 14)

► **Exemple I.1**

Considérons l'expérience qui consiste à tirer au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Le contexte d'une telle expérience soulève quelques questions qui permettent d'énoncer les définitions fondamentales.

1 - Qu'est-ce qu'un résultat de cette expérience ?

Un résultat particulier de cette expérience est formulé de façon précise par l'atout [1] et la hauteur de la carte tirée.

2 - Peut-on prédire un résultat particulier avant le tirage d'une carte ?

Il est bien évident que, dans des conditions normales (jeu de cartes parfaitement mélangé et cartes non visibles au moment du tirage), le joueur ne peut pas annoncer ou prédire la carte qu'il a choisie tant qu'il ne l'a pas retournée et cela, toutes les fois que l'expérience sera reconduite dans les mêmes conditions.

Cette dernière remarque conduit à formuler la définition suivante :

■ **Définition I.1** ***Expérience aléatoire***

Une expérience aléatoire est une expérience qui, lorsqu'elle est répétée dans des conditions identiques, donne des résultats que l'on ne peut prévoir. (notation : $\mathcal{E}$)

La définition I.1 précise donc que lors de la réalisation d'une expérience aléatoire, il n'est pas possible de prédire son résultat. En revanche, la réponse à la première question *« Qu'est-ce qu'un résultat de cette expérience ? »*, montre qu'il est possible de décrire avec précision ce qu'est un résultat attendu de l'expérience. Cet aspect est fondamental, car il permet de donner une description détaillée et exhaustive des issues possibles d'une expérience aléatoire. Sa présentation fait l'objet de la section suivante.

2 Description d'une expérience aléatoire

2.1 Ensemble fondamental et événements élémentaires

Compte tenu de la définition I.1 d'une expérience aléatoire et de la réponse à la question 2, il semble naturel de poursuivre avec la question suivante :

3 - Quels sont tous les résultats ou issues *possibles* de cette expérience ?

Il est évident, mais il est bon de le rappeler, qu'avant de répondre à cette question, il est indispensable d'avoir répondu précisément à la question 1 *« Qu'est-ce qu'un résultat de cette expérience ? »*

[1] le terme atout est ici utilisé afin de réserver le terme *« couleur »* à la couleur réelle d'une carte (rouge ou noir)

Dans le cas de l'exemple choisi (I.1), un résultat particulier sera constitué d'un atout (choisi parmi 4) associé à une hauteur (choisie parmi 8). Il y a donc 32 (4×8) issues ou résultats possibles à cette expérience aléatoire que l'on peut rassembler au sein de l'ensemble :

$$\{7\clubsuit\,;8\clubsuit\,;9\clubsuit\,;10\clubsuit\,;V\clubsuit\,;D\clubsuit\,;R\clubsuit\,;As\clubsuit\,;7\diamondsuit\,;\ldots\,;D\heartsuit\,;\ldots\,;As\spadesuit\}$$

Il apparaît bien ici que lorsqu'on réalise une expérience aléatoire parfaitement définie, il est aisé de décrire de façon précise et exhaustive *ce qui peut se produire* à l'issue de cette expérience.

En d'autres termes, il s'agit de répertorier tout ce qui est *possible* en tant que *résultat*, *réalisation* ou *issue* de ladite expérience.

Cette phase descriptive essentielle et incontournable conduit à la construction de l'ensemble de tous les résultats possibles, appelé ensemble fondamental. Toutes ces remarques permettent d'énoncer les définitions suivantes.

■ **Définition I.2** ***Ensemble fondamental des événements***

Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, l'ensemble de tous ses résultats ou issues possibles est appelé ensemble fondamental associé à $\mathcal{E}$. On emploie aussi parfois les termes espace des épreuves, espace des éventualités ou encore espace fondamental. (notation : Ω)

■ **Définition I.3** ***Événement élémentaire***

Chaque résultat particulier d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, qui est un élément de l'ensemble fondamental Ω, est appelé événement élémentaire, ou encore issue ou réalisation de $\mathcal{E}$. (notation : ω ou ω_i)

Remarque I.1

À ce niveau il est important de noter que les événements élémentaires sont tous distincts et que par conséquent, un seul d'entre eux sera réalisé à l'issue de $\mathcal{E}$. On dit également que la réalisation d'un événement élémentaire exclut la réalisation conjointe de tout autre événement élémentaire.

2.2 Événements au sens large

Une fois défini l'ensemble fondamental associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ on connaît donc de façon précise et exhaustive toutes les issues possibles de $\mathcal{E}$ que l'on nomme désormais *événements élémentaires*.
Toutefois, il est fréquent que l'on soit amené à s'intéresser à des issues dont la définition ou la formulation correspondent à un niveau de description plus large que celui fourni par les événements élémentaires et dont la réalisation peut résulter de celle de différents événements élémentaires. Dans ce contexte, on parle alors d'*événement au sens large* ou tout simplement d'*événement aléatoire*. Les exemples qui suivent permettent de fixer les idées et de formuler quelques remarques qui introduisent la définition précise d'un événement aléatoire.

Reprenons l'exemple I.1. Lorsque l'on tire une carte d'un jeu de 32 cartes, il est possible que la règle du jeu adoptée précise les seuls résultats qui seront pris en considération et qui ne sont pas nécessairement des événements élémentaires (Cf. définition I.3). Les exemples I.2 à I.4 qui suivent illustrent ce propos.

Rappelons tout d'abord que :

$$\Omega = \{7\clubsuit\,;8\clubsuit\,;9\clubsuit\,;10\clubsuit\,;V\clubsuit\,;D\clubsuit\,;R\clubsuit\,;As\clubsuit\,;7\diamondsuit\,;\ldots\,;D\heartsuit\,;\ldots\,;As\spadesuit\}$$

► **Exemple I.2** ***Seul l'atout nous intéresse***

À l'issue du tirage, le joueur pourra par exemple déclarer qu'il a tiré un $\ll Cœur \gg$ s'il a tiré l'une quelconque des 8 cartes du jeu qui correspondent à l'atout cœur (même chose pour les 3 autres atouts). En d'autres termes, le résultat $\ll Cœur \gg$ sera réalisé si l'événement élémentaire correspondant à la carte tirée appartient au sous-ensemble de Ω :

$$\heartsuit = \{7\heartsuit\,; 8\heartsuit\,; 9\heartsuit\,; 10\heartsuit\,; V\heartsuit\,; D\heartsuit\,; R\heartsuit\,; As\heartsuit\}$$

On peut définir de la même manière les 3 autres issues correspondant à $\clubsuit$, $\diamondsuit$ et $\spadesuit$

► **Exemple I.3** ***Seule la couleur nous intéresse***

À l'issue du tirage, le joueur pourra par exemple déclarer qu'il a tiré la couleur $\ll Rouge \gg$ s'il a tiré l'une quelconque des 16 cartes du jeu qui correspondent à $\ll Cœur \gg$ ($\heartsuit$) ou $\ll Carreau \gg$ ($\diamondsuit$). Dans ce cas, avec les notations de l'exemple précédent, on pourra dire que $\ll Rouge \gg$ est réalisé si la carte tirée appartient au sous-ensemble de Ω $Rouge = \heartsuit \cup \diamondsuit$ et que $\ll Noir \gg$ est réalisé dans le cas contraire ($Noir = \clubsuit \cup \spadesuit$)

► **Exemple I.4** ***Seule la hauteur de la carte nous intéresse***

L'événement $\ll As \gg$ sera réalisé si la carte tirée appartient au sous-ensemble

$$As = \{As\clubsuit\,; As\diamondsuit\,; As\heartsuit\,; As\spadesuit\}$$

tandis que le joueur pourra déclarer avoir tiré un $\ll Huit \gg$ si la carte tirée appartient au sous-ensemble de Ω $Huit = \{8\clubsuit\,; 8\diamondsuit\,; 8\heartsuit\,; 8\spadesuit\}$

L'analyse des 3 cas précédents [2] illustrés sur la figure I.1 amène à formuler quelques remarques qui permettent d'étendre la notion d'issue d'une expérience aléatoire par la définition d'un événement aléatoire au sens large.

Ω

$7\clubsuit$ ω_1	$8\clubsuit$ ω_2	$9\clubsuit$ ω_3	$10\clubsuit$ ω_4	$V\clubsuit$ ω_5	$D\clubsuit$ ω_6	$R\clubsuit$ ω_7	$As\clubsuit$ ω_8
$7\diamondsuit$ ω_9	$8\diamondsuit$ ω_{10}	$9\diamondsuit$ ω_{11}	$10\diamondsuit$ ω_{12}	$V\diamondsuit$ ω_{13}	$D\diamondsuit$ ω_{14}	$R\diamondsuit$ ω_{15}	$As\diamondsuit$ ω_{16}
$7\heartsuit$ ω_{17}	$8\heartsuit$ ω_{18}	$9\heartsuit$ ω_{19}	$10\heartsuit$ ω_{20}	$V\heartsuit$ ω_{21}	$D\heartsuit$ ω_{22}	$R\heartsuit$ ω_{23}	$As\heartsuit$ ω_{24}
$7\spadesuit$ ω_{25}	$8\spadesuit$ ω_{26}	$9\spadesuit$ ω_{27}	$10\spadesuit$ ω_{28}	$V\spadesuit$ ω_{29}	$D\spadesuit$ ω_{30}	$R\spadesuit$ ω_{31}	$As\spadesuit$ ω_{32}

$$\begin{aligned} As &= \{As\clubsuit\,; As\diamondsuit\,; As\heartsuit\,; As\spadesuit\} \\ &= \{\omega_8\} \cup \{\omega_{16}\} \cup \{\omega_{24}\} \cup \{\omega_{32}\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{\omega_i\} \quad \text{avec } I = \{8, 16, 24, 32\} \end{aligned}$$

$$\spadesuit = \bigcup_{i=25}^{32} \{\omega_i\} \quad \diamondsuit = \bigcup_{i=9}^{16} \{\omega_i\} \quad Rouge = \bigcup_{i=9}^{24} \{\omega_i\}$$

$$Noir = \bigcup_{i \in I} \{\omega_i\} \ \text{ avec } I = \{1 \ldots 8, 25 \ldots 32\}$$

FIG. I.1 – Ensemble fondamental et événements de l'exemple I.1 du tirage d'une carte.

Remarque I.2

Dans les trois exemples (I.2 à I.4), les issues nommées ($\ll Cœur \gg$, $\ll Rouge \gg$, $\ll Huit \gg$, ...) sont représentées, non pas par des événements élémentaires, mais par des sous-ensembles de Ω. De ce fait, les points-virgules "$;$" qui séparent les éléments dans les listes représentant les événements $\ll Cœur \gg$, $\ll As \gg$ ou $\ll Huit \gg$, correspondent à l'opérateur "$\cup$" d'union ensembliste. En effet, l'événement $\ll As \gg$ est par exemple représenté par le sous-ensemble formé par la réunion de tous les événements élémentaires de Ω qui correspondent à un As (Cf. figure I.1).

[2]Le lecteur est encouragé à trouver d'autres exemples à partir du même ensemble fondamental Ω.

Les événements élémentaires constituent donc, de fait, le niveau de description le plus précis et le plus détaillé de l'expérience aléatoire, mais cette description n'est parfois pas adéquate ni requise. La réunion de certains d'entre eux au sein de sous-ensembles de Ω constitue alors d'autres niveaux de description et d'interprétation plus élaborés ou plus adaptés à ce que l'on cherche. Cette structure particulière d'issue d'une expérience aléatoire entraîne la remarque suivante.

Remarque I.3

La réalisation d'un événement élémentaire implique la réalisation de tous les ensembles ou sous-ensembles auxquels il appartient. Par exemple, si on tire l'As de Cœur (événement élémentaire $As\heartsuit$), on peut de fait déclarer que les événements As, $\heartsuit$ ou $Rouge$ sont réalisés.

Les exemples I.2 à I.4 ainsi que les remarques I.2 et I.3 permettent de donner maintenant la définition suivante d'un événement aléatoire ainsi que celle de l'événement certain.

■ **Définition I.4** ***Événement aléatoire***

Un événement aléatoire est un événement lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ précise. Il dépend exclusivement de l'événement élémentaire qui est réalisé à l'issue de cette expérience. C'est donc un sous-ensemble ou une partie de l'ensemble fondamental Ω (Cf. figure I.1) (notation : A ou A_i)

■ **Définition I.5** ***Événement certain***

Par définition, Ω inclut tous les événements élémentaires de $\mathcal{E}$ et il est donc, d'après la remarque I.3, systématiquement réalisé. Pour cette raison il est appelé événement certain lié à $\mathcal{E}$.

2.3 Représentation de l'ensemble fondamental

La figure I.1 donne une représentation graphique de l'ensemble fondamental et des événements relatifs à l'expérience aléatoire du tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes (exemple I.1 page 3). Cette représentation sous forme de graphe, appelé diagramme de Venn, est très souvent utile afin de visualiser les situations et événements sur lesquels porte le problème posé. Un schéma plus général que celui de la figure I.1 est présenté sur la figure I.2.

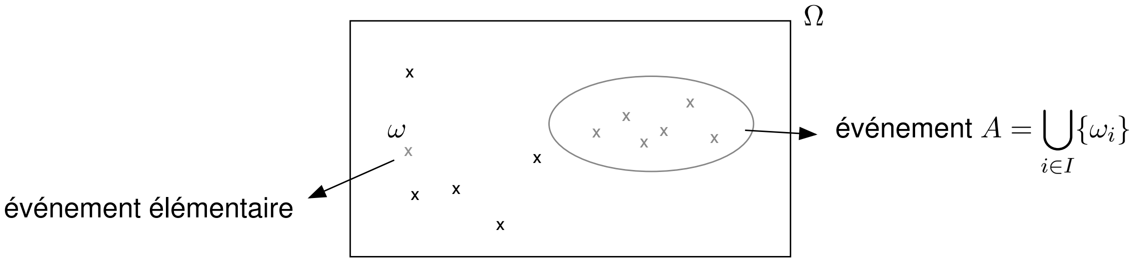

FIG. I.2 – Diagramme de Venn

2.4 Ensemble fondamental et tribu des événements

Les définitions I.3 et I.4 invitent donc, pour un ensemble fondamental Ω donné, à distinguer les événements élémentaires, éléments de Ω, des événements aléatoires au sens large qui sont des sous-ensembles ou parties de Ω.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire donnée et selon les motifs ou objectifs fixés, il faudra donc considérer et déterminer, outre l'ensemble fondamental Ω, *un ensemble de parties de* Ω correspondant aux événements aléatoires liés à cette expérience et au problème posé.

Toutefois, en accord avec la définition d'un événement aléatoire (définition I.4), l'ensemble des parties de Ω qui sera choisi doit vérifier quelques propriétés liées à la notion même d'événement et d'expérience aléatoire.

Les remarques qui suivent précisent quelques-unes de ces propriétés attendues [3]

Remarque I.4

Si A et B sont deux événements liés à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, alors il semble normal de considérer que la réalisation conjointe de A ET B (correspondant à la partie $A \cap B$ de Ω) est également un événement lié à $\mathcal{E}$. Par exemple, si A est l'ensemble associé à l'événement « As » et B l'ensemble associé à l'événement « $Rouge$ », alors

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{As\clubsuit\,;As\diamondsuit\,;As\heartsuit\,;As\spadesuit\} \cap \{7\heartsuit\,;8\heartsuit\ \ldots;R\heartsuit\,;As\heartsuit\,;7\diamondsuit\,;8\diamondsuit\ \ldots;R\diamondsuit\,;As\diamondsuit\} \\ &= \{\,As\heartsuit\,;As\diamondsuit\,\} \subset \Omega \end{aligned}$$

$A \cap B$ représente ici l'événement « $tirer\ un\ As\ rouge$ ».

Remarque I.5

Si A et B sont deux événements liés à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, alors il semble normal de considérer que la réalisation de A OU B (correspondant à la partie $A \cup B$ de Ω) est également un événement lié à $\mathcal{E}$. En reprenant l'exemple des événements A et B de la remarque précédente, il apparaît bien que

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{As\clubsuit\,;As\diamondsuit\,;As\heartsuit\,;As\spadesuit\} \cup \{7\heartsuit\,;8\heartsuit\ \ldots;R\heartsuit\,;As\heartsuit\,;7\diamondsuit\,;8\diamondsuit\ \ldots;R\diamondsuit\,;As\diamondsuit\} \\ &= \{\,As\clubsuit\,;As\spadesuit\,;7\heartsuit\,;8\heartsuit\ \ldots;R\heartsuit\,;As\heartsuit\,;7\diamondsuit\,;8\diamondsuit\ \ldots;R\diamondsuit\,;As\diamondsuit\,\} \subset \Omega \end{aligned}$$

$A \cup B$ correspond à l'événement « $tirer\ un\ As\ OU\ la\ couleur\ rouge$ » (le OU n'étant pas exclusif)

Remarque I.6

Si A est un événement lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, alors il semble normal de considérer que la non réalisation de A (correspondant à la partie $\overline{A}$, complémentaire de A dans Ω) est également un événement lié à $\mathcal{E}$. Si l'on reprend $B = Rouge$, alors $\overline{B} = Noir \subset \Omega$.

Intuitivement, les propriétés évoquées ci-dessus incitent à considérer l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω comme l'ensemble des événements liés à une expérience aléatoire.

Plus précisément, et en accord avec les remarques précédentes, on est amené à considérer des classes particulières de parties de Ω appelées *tribus*. Les tribus présentent de bonnes propriétés pour le calcul des probabilités et permettent ainsi d'étendre la définition d'ensemble fondamental à celle d'ensemble fondamental probabilisable.

[3] Le lecteur est invité à compléter les exemples fournis ici pour illustrer ces remarques.

■ **Définition I.6** ***Tribu des événements***

Soit Ω un ensemble. Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω est appelé une tribu (ou encore σ-algèbre) si :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$
2. *Si $A \in \mathcal{T}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{T}$ avec $\overline{A}$, complémentaire de A dans Ω (stabilité par passage au complémentaire)*
3. *Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}$ alors $\bigcup_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$ (stabilité par union dénombrable)*

Remarque I.7

Les conditions 2 et 3 de la définition I.6 impliquent qu'une tribu est également stable par intersection dénombrable :

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T} \text{ alors } \bigcap_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$$

2.5 Ensemble fondamental probabilisable

■ **Définition I.7** ***Ensemble fondamental probabilisable***

Les événements aléatoires, éléments d'une tribu $\mathcal{T}$, sont appelés les parties mesurables de Ω (la mesure qui intervient dans le cadre de ce cours sera une mesure de probabilité). Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est alors appelé ensemble ou espace fondamental mesurable ou plus exactement ici, ensemble ou espace fondamental probabilisable.

La description de Ω reposant sur l'ensemble de tous ses éléments (événements élémentaires ou issues de l'expérience aléatoire) offre une vision *« atomique »* d'une expérience aléatoire, tandis que la description fournie par la tribu associée à Ω en offre une vision *« macroscopique »* et particulière comme l'illustrent les quelques exemples de tribus suivants :

► **Exemple I.5**

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ est parfois appelée tribu grossière ou triviale

► **Exemple I.6**

$\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est appelée tribu de Bernoulli

► **Exemple I.7**

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ est parfois appelée tribu discrète

Le choix d'une tribu complète donc la description d'une expérience aléatoire en précisant l'ensemble des événements, parties de Ω, auxquels on porte un intérêt particulier. De ce point de vue, la notion de tribu *engendrée* par une famille de parties et plus particulièrement par une partition de Ω est d'un grand intérêt et se trouve présente dans de nombreux problèmes.

■ **Définition I.8** ***Tribu engendrée***

Soit $\Omega \neq \emptyset$, et $\mathcal{A}$, une classe non vide de parties de Ω. S'il existe une plus petite tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{T}$ est appelée tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

2.6 Tribu engendrée par une partition

Une partition constitue une classe particulièrement intéressante de parties non vides de Ω et cette représentation sera présente dans de nombreux problèmes. Il n'est donc pas inutile de rappeler la définition d'une partition de Ω, que l'on appelle aussi système complet d'événements. Une illustration en est donnée à la figure I.3.

■ **Définition I.9** ***Partition ou système complet d'événements***

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et Ω son ensemble fondamental. On appelle partition ou système complet ou exhaustif d'événements sur Ω, toute famille finie ou dénombrable $\{A_i \, i \in I \subseteq \mathbb{N}^*\}$ de Ω telle que $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \; i \neq j$ et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

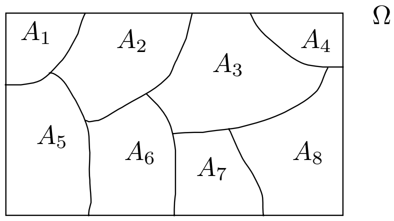

FIG. I.3 – Partition ou système complet d'événements sur un ensemble fondamental

Conformément aux définitions I.8 et I.9, on peut donner ici quelques exemples de tribus engendrées par une partition.

► **Exemple I.8** ***Tirage d'une carte et tribu de Bernoulli***

Dans le cas de la tribu de Bernoulli (Cf. exemple I.6), $\mathcal{T}$ est engendrée par une partition constituée d'un événement unique A. Dans le cas de l'expérience aléatoire du tirage d'une carte (exemple I.1), si on ne s'intéresse qu'à la couleur, on choisira comme tribu d'événements, la tribu engendrée par « $Rouge$ » (ou « $Noir$ »), soit $\mathcal{T} = \{\emptyset, Rouge, \overline{Rouge} = Noir, \Omega = Rouge \cup Noir\}$

► **Exemple I.9** ***Tribu engendrée par une partition en 3 parties.***

Considérons par exemple une partition $\mathcal{A} = \{A_1 \, , A_2 \, , A_3\}$ de Ω, la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la famille $\mathcal{T} = \{\emptyset \, , A_1 \, , A_2 \, , A_3 \, , A_1 \cup A_2 \, , A_1 \cup A_3 \, , A_2 \cup A_3 \, , A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega\}$

► **Exemple I.10** ***Seul l'atout nous intéresse***

On choisira alors la tribu engendrée par la partition $\{\clubsuit \, , \diamondsuit \, , \heartsuit \, , \spadesuit\}$

► **Exemple I.11** ***Seule la hauteur de la carte nous intéresse***

On choisira cette fois la tribu engendrée par la partition $\{7 \, , 8 \, , 9 \, , 10 \, , V \, , D \, , R \, , As\}$

3 Les divers types d'ensembles fondamentaux

La description d'une expérience aléatoire par un ensemble fondamental probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ étant admise, elle doit, pour être complète, prendre en considération la structure de Ω. Celle-ci est liée à l'expérience aléatoire et à la nature des événements élémentaires qu'elle engendre. Dans la grande majorité des problèmes auxquels est confronté l'ingénieur ou le chercheur, la distinction entre le *cas discret* et le *cas continu* s'avère suffisante. Cette distinction est primordiale car elle a un impact direct sur la modélisation probabiliste d'une expérience aléatoire.