1 Second degré

Objectifs

Le programme de première, comme celui de la classe de seconde, s'inscrit dans le cadre de la résolution de problèmes.

Ce chapitre permettra entre autres de vous doter d'un nouvel outil mathématique permettant de traiter des problèmes du second degré.

Il permettra le traitement de la forme canonique, la résolution d'une équation du second degré, l'étude des polynômes de deuxième degré et la factorisation d'expressions complexes.

Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010)

Contenus	Capacités attendues
Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.

Prérequis

- Identités remarquables.
- Résolution d'une équation du premier degré.
- Fonction carré.
- Fonctions polynômes de degré deux.
- Dans ce chapitre, on munit le plan d'un repère orthogonal.

Éléments essentiels du cours

I. Fonction polynôme de degré deux

■ ***Définition***

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ est appelée fonction polynôme du second degré ou simplement fonction du second degré.

L'expression $ax^2 + bx + c$ est encore appelée trinôme du second degré ou par abus de langage « trinôme ».

Exemples et contre-exemples

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$ et $g(x) = 3x - 2x^2 + 4$ sont des fonctions de second degré.

Les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1-x)^2 - x^2$ et $k(x) = 7 - 2x$ sont des fonctions de premier degré.

■ ***Définition***

On appelle racine du trinôme $ax^2 + bx + c$ ou d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ toute solution x de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemple

$2 \times 3^2 - 4 \times 3 - 6 = 0$, ainsi 3 est une racine du trinôme $2x^2 - 4x - 6$.

II. Forme canonique

Propriété

Toute fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$$

Cette forme est appelée la forme canonique.

Remarquons que la forme canonique est le cœur de ce chapitre, du reste elle permettra de :

- dire si le trinôme possède ou non des racines, et lesquelles,
- factoriser le trinôme lorsque cela est possible,
- déterminer le signe du trinôme suivant les valeurs de x,
- étudier les variations de la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ et tracer sa représentation graphique avec précision.

III. Forme factorisée

■ ***Définition***

Pour toute fonction polynôme de degré deux définie pour tout réel x par :

$f(x)=ax^2+bx+c$,

on appelle discriminant de f, noté Δ, le nombre réel défini par $\Delta=b^2-4ac$.

Remarque

On parlera indifféremment du discriminant d'un trinôme ou d'une équation de deuxième degré.

Il apportera dans ce cadre une information sur l'existence et le nombre de racines.

Propriété

Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.

Si $\Delta>0$: l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta=0$: l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution :

$$x_0=\frac{-b}{2a}.$$

Si $\Delta<0$: l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.

Précisons que dans le cas où le discriminant est strictement négatif, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans l'ensemble des réels. Gardons toutefois à l'esprit que cette équation admet des solutions dans un autre ensemble que vous étudierez en terminale.

Propriété

Pour tout polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=ax^2+bx+c$ et de discriminant Δ.

Si $\Delta>0$, $f(x)=a(x-x_2).(x-x_1)$, où x_1 et x_2 sont les racines de ce polynôme.

Si $\Delta=0$, $f(x)=a(x-x_0)^2$, où x_0 est la racine double du polynôme.

Si $\Delta<0$, $f(x)$ ne peut pas se factoriser en facteurs du premier degré.

Disons que toute fonction polynôme de degré deux se présente sous trois formes possibles : développée, factorisée, canonique. Au gré des problèmes, se posera à vous le choix de la forme la plus adéquate pour aboutir promptement et efficacement.

IV. Signe d'un trinôme

Propriété

Sur $\mathbb{R}$, pour tout polynôme de degré deux défini par $f(x)=ax^2+bx+c$.

Si $\Delta>0$, $f(x)$ s'annule pour $x=x_1$ et $x=x_2$ (on suppose que $x_1<x_2$). Alors :

$\forall x\in[x_1\,;x_2]$, $f(x)$ est du signe opposé de *a*.

$\forall x\in]-\infty\,;x_1]\cup[x_2\,;+\infty[$, $f(x)$ est du signe de *a*.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	– signe de a	0	signe de a	

Si $\Delta=0$, $f(x)$ s'annule pour $x=x_0$.

Alors, pour tout réel $x\neq x_0$, $f(x)$ est du signe de *a*.

Si $\Delta<0$, pour tout réel *x*, $f(x)$ est du signe de *a*.

Remarque

On pourra résumer le signe d'un trinôme par le corollaire ci-dessous, qui n'est pas sans rappeler celui du signe du polynôme du premier degré.

Corollaire

Le trinôme ax^2+bx+c est toujours du signe de *a* sauf entre les racines lorsqu'elles existent.

V. Variations et représentation graphique

1. Extremum

Propriété

Pour toute fonction polynôme f de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$,

la fonction f admet un extremum $\beta(= f(\alpha))$ qui n'est atteint qu'en $x = \alpha$.

Si $a > 0$, alors β est un minimum,

Si $a < 0$, alors β est un maximum.

2. Variations

Propriété

Pour toute fonction polynôme f de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$,

Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

Si $a < 0$, alors f est croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

3. Courbe représentative

Propriété

Dans le plan rapporté à un repère (O ; I, J), la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a est un réel non nul) est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Observons que la parabole dont il est question ci-dessus admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$ et que lorsque le coefficient de x^2 est positif, elle est tournée vers les ordonnées positives, sinon elle est tournée vers les ordonnées négatives.

Et enfin son équation est : $y = ax^2 + bx + c$.

Maîtriser les méthodes

M1 Déterminer la forme canonique d'un trinôme $ax^2 + bx + c$

■ ***Principe***

Mettre ax^2+bx+c sous la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$.

> Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=-2x^2+20x+10$.
> Déterminer la forme canonique de f.

▸ **1^re^ méthode**

On factorise par a.

$f(x)=-2\left(x^2-10x-5\right)$

On sait que $x^2+\frac{b}{a}x=x^2+2\frac{b}{2a}x$ est le début du développement $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Pour tout réel x,

$x^2-10x=x^2-2\times 5x$

Soit, $\boxed{x^2-10x=(x-5)^2-25}$

Dans l'expression $f(x)$, on remplace $x^2+\frac{b}{a}x$ par $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$.

On obtient donc pour tout réel x, $f(x)=-2\left((x-5)^2-25-5\right)$

Et enfin, la forme canonique de f: $f(x)=-2\left((x-5)^2-30\right)$

Soit, $\boxed{f(x)=-2(x-5)^2+60}$

▸ **2^e^ méthode**

Dans la forme développée de f, on conviendra que $a=-2$, $b=20$ et $c=10$.

On obtient ainsi : $\alpha=-\frac{20}{-4}=5$ et $\beta=f(5)=-2\times 5^2+20\times 5+10=60$.

La forme canonique de f est donc $\boxed{f(x)=-2(x-5)^2+60}$.

M2 Résoudre une équation du second degré

■ ***Principe***

Pour résoudre une équation du second degré, on peut utiliser la forme canonique ou utiliser le calcul du discriminant.

Résoudre les équations suivantes :

$$2x^2 - x - 6 = 0, \quad 2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + 3x + 10 = 0.$$

▸ **Avec la forme canonique**

Pour tout réel x, $2x^2 - x - 6 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right)$

Soit encore, $2x^2 - x - 6 = 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 3\right)$

Enfin, $\boxed{2x^2 - x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 6 = 0 &\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \\ &\Leftrightarrow x - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad \text{ou} \quad x - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ sont $-3/2$ et 2.

▸ **Avec le discriminant**

Le discriminant Δ de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$, est :

$\Delta = 1 - 4 \times (-12) = 49 = (7)^2 > 0.$

1 Méthodes

D'où les solutions en x :

$$2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7^2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2,$$

Les solutions de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ sont $-3/2$ et 2.

Pour $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$.

▶ **Avec la forme canonique**

Pour tout réel x, $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right)$

Soit encore, $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{9}{16}\right)$

Enfin, $\boxed{2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}$

Ainsi,

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

La solution de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ est $\frac{3}{4}$.

▶ **Avec le discriminant**

Le discriminant Δ de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$, est :

$$\Delta = 9 - 4 \times \left(2 \times \frac{9}{8}\right) = 0.$$

D'où, l'unique solution en x :

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$