Chapitre I

Intégration

Ce chapitre a pour but de donner, sans preuve, les résultats d'intégration utiles par la suite, en se plaçant d'emblée dans le cadre le plus pratique pour l'utilisateur. Ce cadre est celui de l'intégrale de Lebesgue, dont la construction est délicate. Tant qu'on se limite à des applications pratiques, il est possible de travailler avec l'intégrale de Lebesgue sans l'avoir construite car la théorie englobe celle de l'intégration au sens de Riemann des fonctions bornées sur un intervalle borné et celle des intégrales absolument convergentes. On donne néanmoins les grandes lignes de la construction pour le lecteur intéressé.
Pourquoi considérer l'intégrale de Lebesgue de fonctions dont l'intégrale se laisse définir de façon plus élémentaire ? L'intégrale de Lebesgue est pratique pour les physiciens et les ingénieurs car elle permet de s'affranchir d'hypothèses habituellement exigées dans les théorèmes d'intégration s'appuyant sur l'intégrale de Riemann (continuité par exemple). Lorsqu'on travaille avec l'intégrale de Lebesgue, il est de plus possible de remplacer une fonction par une autre qui lui est « presque-partout égale », ce qui est souvent utile. Les théorèmes de convergence sous le signe d'intégrale et ceux permettant d'étudier une fonction définie par une intégrale voient ainsi leurs hypothèses se simplifier.
Par ailleurs seule l'intégrale de Lebesgue permet de manipuler facilement et rigoureusement les intégrales multiples.
Travailler avec l'intégrale de Lebesgue devient de toute façon très vite « transparent » pour un utilisateur, et comme cela permet de minimiser les hypothèses des « grands théorèmes » d'intégration, il serait dommage de s'en priver.
Pour une construction rigoureuse de cette intégrale et une preuve des théorèmes fournis ici, on se reportera aux ouvrages classiques de théorie de la mesure.

1 Initiation à l'intégrale de Lebesgue

1.1 Notion de mesure

Il existe un moyen naturel de mesurer la « taille » des parties de $\mathbb{R}$, à la condition qu'elles soient *mesurables* (sous-entendu : *au sens de Lebesgue*), ce qui est le cas de toutes celles que l'on rencontre en pratique. Ce moyen est la *mesure de Lebesgue|(*, notée ici m. La définition des ensembles mesurables et la construction de la mesure de Lebesgue sortent du cadre de ce livre. Si A est une partie mesurable de $\mathbb{R}$, $m(A)$ est soit un réel positif, soit $+\infty$. Pour calculer la mesure de Lebesgue des parties de $\mathbb{R}$ rencontrées en pratique (qui sont toutes mesurables), il suffit d'utiliser les quelques propriétés suivantes.

- La mesure d'un intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert, qu'il soit borné ou non) est sa longueur. Elle est infinie lorsque l'intervalle est non borné.

– Une mesure, en particulier la mesure de Lebesgue, possède la propriété d'additivité dénombrable. Cela signifie que si on se donne un ensemble d'indices $J \subset \mathbb{N}$ et une famille $(E_j)_{j\in J}$ de parties (mesurables) de $\mathbb{R}$ indexée par J, si

$$\forall (i,j) \in J^2 \quad i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$$

alors

$$m\Big(\bigcup_{j\in J} E_j\Big) = \sum_{j\in J} m(E_j)$$

Autrement dit, pour des sous-ensembles (mesurables) E_j de $\mathbb{R}$ *disjoints deux à deux*, la mesure d'une union *dénombrable* est la somme des mesures.

– La mesure de Lebesgue est *invariante par translation*. Autrement dit, pour tout réel λ et toute partie (mesurable) A de $\mathbb{R}$, on a

$$m\big(\{x+\lambda\,;\, x \in A\}\big) = m(A)$$

On en déduit notamment les cas particuliers importants suivants.

– On a $m(\emptyset) = m\big(]a,a[\big) = 0$.
– Un ensemble réduit à un point a également une mesure nulle (car $\{a\} = [a,a]$).
– La mesure d'une union d'intervalles *disjoints deux à deux* est la somme des longueurs des intervalles.
– La mesure d'un ensemble A fini ou dénombrable est nulle. En effet un ensemble dénombrable est soit fini, soit en bijection avec $\mathbb{N}$, de sorte que l'on peut *numéroter* ses éléments. Il s'écrit donc $A = \{x_n\,;\, n \in J\}$ avec $J \subset \mathbb{N}$, donc :

$$m(A) = m\Big(\bigcup_{n\in J}\{x_n\}\Big) = \sum_{n\in J} m(\{x_n\}) = \sum_{n\in J} 0 = 0$$

Signalons qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ non dénombrables et de mesure nulle[1].

Exemples.

1. $m(\mathbb{R}) = m\big(]-\infty,+\infty[\big) = +\infty$.
2. $m\big(]-\infty;5[\big) = +\infty$.
3. $m\big([-2;\sqrt{3}[\cup[5;7+\pi]\big) = (\sqrt{3}-(-2)) + (7+\pi-5) = 4+\sqrt{3}+\pi$.
4. $m\big(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\big) = m\big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m\big(]n,n+1[\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1 = +\infty$.
5. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est de mesure nulle. En effet, $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Définition 1.1 *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ est vraie presque-partout (en abrégé, vraie p.p.), ou vraie pour presque-tout x, lorsque l'ensemble des valeurs de x qui ne vérifient pas cette propriété est de mesure nulle.*

Exemples.

1. La propriété « x est irrationnel » est vraie presque-partout, car $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle.
2. On note $\mathbf{1}_E$ la fonction *indicatrice* d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$, *i.e.* la fonction égale à 1 si $x \in E$ et 0 sinon. Alors les deux fonctions $\mathbf{1}_{[a,b]}$ et $\mathbf{1}_{]a,b[}$ sont égales presque-partout. Dans les applications on ne distingue pas ces deux fonctions : on considère qu'elles définissent le même signal (celui que l'on appelle « porte », ou « créneau », en traitement du signal).
   Dans ce chapitre on identifiera toujours deux fonctions égales p.p.

1. Par exemple *l'ensemble triadique de Cantor*, qui peut être défini comme l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont le développement en base 3 ne comporte que les chiffres 0 et 2.

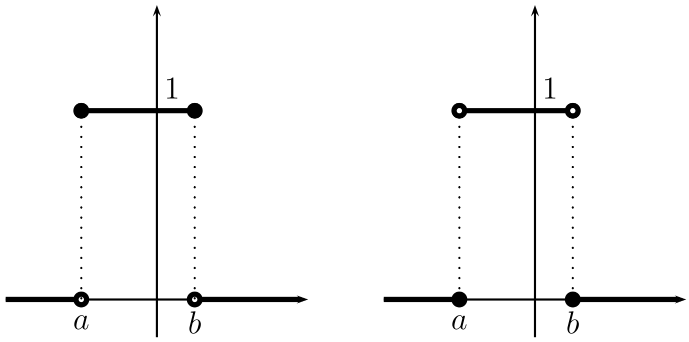

FIGURE I.1 – *Fonctions « Portes » égales presque-partout.*

1.2 Intégration au sens de Lebesgue

Au début du vingtième siècle, le mathématicien français Henri Lebesgue a élaboré une théorie de l'intégration plus générale et mieux adaptée aux applications que l'intégrale de Riemann. Cette théorie s'applique en effet à une classe très vaste de fonctions, dites *mesurables* (sous-entendu : *au sens de Lebesgue*).
Une fonction f, définie sur une partie J mesurable, à valeurs réelles, est mesurable si pour tout intervalle I, l'image réciproque de I, *i.e.* l'ensemble $f^{-1}(I) = \{x \in J\,;\, f(x) \in I\}$, est une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Si f est à valeurs complexes, elle est dite mesurable lorsque sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Or, nous avons signalé qu'en pratique on ne rencontre jamais de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non mesurables. Par conséquent, dans ce cours, tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ seront supposés mesurables, ce qui implique que toutes les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ seront supposées mesurables. Cette convention sera utilisée sans rappel dans les énoncés des définitions ou des théorèmes.

Remarque. Cette convention peut choquer un mathématicien. Néanmoins, la construction de fonctions non mesurables fait appel à l'axiome du choix, de sorte que ces fonctions sont des objets mathématiques abstraits qu'un physicien ou un ingénieur ne risque pas de rencontrer. Mais il est évidemment fortement déconseillé à un étudiant en mathématiques d'oublier l'hypothèse de mesurabilité lorsqu'il fait appel à un théorème de la théorie de l'intégration...

Nous pourrons au besoin considérer des fonctions à valeurs dans la *droite numérique achevée* :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Une telle fonction f est mesurable si l'ensemble $f^{-1}([a, +\infty])$ est mesurable pour tout réel a. Finalement, nous supposerons que toute fonction $f : J \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est mesurable.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto 1/|x|$ peut être définie sur $\mathbb{R}$ si on considère que $f(0) = +\infty$. C'est une fonction à valeurs dans $[0, +\infty]$. Elle est mesurable.

Nous donnons plus loin, dans un complément à destination du lecteur curieux, les grandes étapes de la construction de l'intégrale de Lebesgue. Mais on peut heureusement travailler avec l'intégrale de Lebesgue sans connaître cette construction. Il suffit pour cela d'utiliser les règles fondamentales suivantes.

1. Toute fonction f (mesurable) **positive** sur une partie J (mesurable) de $\mathbb{R}$ possède une intégrale sur J, notée $\int_J f$, qui est soit un nombre positif, soit égale à $+\infty$:

$$f \geq 0 \text{ p.p. sur } J \Longrightarrow \int_J f \in [0, +\infty]$$

Pour comprendre cela, on peut se rappeler que si J est un intervalle et si $f \geq 0$ est assez régulière (par exemple continue sur J), $\int_J f$ est l'aire sous la courbe représentant f, pour $x \in J$. Cette aire peut effectivement être finie ou infinie.
Lorsque $\int_J f < +\infty$, on dit que f est *intégrable* sur J.

Remarques.
- On retiendra qu'une fonction *positive* a toujours une intégrale (finie ou infinie), même si elle n'est pas intégrable.
- Lorsque f est négative p.p. sur J, on peut bien sûr définir $\int_J f = -\int_J(-f)$.
- Lorsque l'on dit d'une fonction qu'elle est *positive* sur J, c'est à comprendre au sens large suivant : $f(x) \in [0, +\infty]$ pour $x \in J$.

2. Si f est positive sur J, alors

$$\int_J f = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \text{ presque-partout sur } J$$

3. Si f n'est pas de signe constant, ou si f est à valeurs complexes, alors son intégrale sur J n'est définie que si l'intégrale de son module est finie, *i.e.* ssi

$$\int_J |f| < +\infty$$

Dans ce cas on dit que f est *intégrable* sur J (on dit aussi *sommable* sur J).
On retient que si f n'est pas de signe constant :

$$\int_J f \quad \text{existe} \Longleftrightarrow \int_J |f| < +\infty \tag{I.1}$$

Si f est intégrable, son intégrale $\int_J f$ est un nombre réel ou complexe que l'on obtient *en pratique* par les techniques usuelles si f est suffisamment régulière (par exemple par un calcul de primitive si f est continue), puisque nous allons voir que toute fonction intégrable au sens de Riemann l'est aussi au sens de Lebesgue et que les deux intégrales sont les mêmes.

4. Si f et g sont intégrables sur J, alors pour toutes constantes complexes α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur J et l'on a

$$\int_J (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_J f + \beta \int_J g$$

Autrement dit, *l'intégration est linéaire*.

5. Deux fonctions intégrables égales p.p. ont la même intégrale.
Cela résulte de la propriété précédente et du deuxième point, car si $f = g$ p.p. sur J, on a $\int_J (f-g) = \int_J f - \int_J g$, avec $\int_J (f-g) = 0$ puisque $f - g$ est nulle p.p. sur J.
Cette propriété est celle qui permet d'identifier deux fonctions égales p.p. si on les considère du point de vue de l'intégration.

6. Si $f \geq g$ p.p. sur J, avec f et g intégrables sur J, alors $\int_J f \geq \int_J g$ (propriété de positivité de l'intégrale).
Cela résulte immédiatement de la linéarité et du premier point.

7. Si f est intégrable sur J, alors (inégalité fondamentale) :

$$\left| \int_J f \right| \leq \int_J |f| \tag{I.2}$$

Complément. Nous donnons ici (pour le lecteur désirant savoir d'où viennent les « recettes » précédentes) les grandes lignes de la construction de l'intégrale de Lebesgue.

Première étape. On appelle *fonction étagée* toute fonction f égale à une combinaison linéaire d'indicatrices de parties mesurables de $\mathbb{R}$, *i.e.* de la forme $f = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbf{1}_{E_k}$, où les E_k sont mesurables et les a_k des réels. On évitera de confondre la notion de fonction étagée avec celle de fonction en escalier utilisée pour construire l'intégrale de Riemann. Une fonction en escalier n'est qu'un cas particulier de fonction étagée (celui où les E_k sont des intervalles).
On définit l'intégrale de Lebesgue d'une telle fonction étagée par $\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{k=1}^{N} a_k\, m(E_k)$, où $m(E_k)$ désigne la mesure de Lebesgue de E_k. Cette définition naturelle correspond à la notion « d'aire sous la courbe » lorsque f est positive. La définition a un sens, car d'une part l'hypothèse « E_k mesurable » implique que $m(E_k)$ est définie ; d'autre part on vérifie facilement qu'elle ne dépend pas de la décomposition en indicatrices choisie.

Deuxième étape. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, mesurable et *positive* (*i.e.* à valeurs dans $[0, +\infty]$), f est la limite simple d'une suite **croissante** de fonctions étagées.
On peut par exemple vérifier que l'on a $f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$, où :

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)}(t) + n\mathbf{1}_{f^{-1}([n,+\infty])}(t) \tag{I.3}$$

La fonction f_n est étagée car les ensembles $f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)$ et $f^{-1}\left([2^n, +\infty]\right)$ sont mesurables, par définition de « f mesurable ». On laisse le lecteur intéressé vérifier que la suite (f_n) est croissante et démontrer que (f_n) tend vers f (c'est le point fondamental de la construction de l'intégrale de Lebesgue). La suite de terme général $\int_{\mathbb{R}} f_n$ est croissante, donc possède une limite dans $[0, +\infty]$. Cette limite est, par définition, $\int_{\mathbb{R}} f$. On vérifie que cette définition de l'intégrale de f ne dépend pas de la suite croissante de fonctions étagées tendant vers f.

Troisième étape. Voyons comment l'intégration des fonctions à valeurs positives permet d'intégrer les fonctions à valeurs complexes dont le module a une intégrale finie.
Pour une fonction définie p.p. sur J à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et de signe quelconque, on écrit :

$$f = f^+ - f^- \quad \text{avec} \quad f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{et} \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

Remarquons que f^+ et f^- sont des fonctions positives, donc admettent une intégrale au sens de Lebesgue, finie ou infinie. *Par définition*, la fonction f est dite intégrable au sens de Lebesgue sur J si f^+ et f^- sont intégrables sur J (*i.e.* ont toutes deux une intégrales finie). Dans ce cas l'intégrale de f est, tout naturellement, définie par :

$$\int_J f = \int_J f^+ - \int_J f^-$$

Une fois que l'on a établi les propriétés de linéarité et de positivité, on voit que f est intégrable sur J ssi sa valeur absolue est intégrable sur J, comme l'affirme la troisième règle pratique énoncée plus haut. En effet on a

$$|f| = f^+ + f^-$$

Si $\int_J |f| < +\infty$, alors $\int_J f^+ < +\infty$ et $\int_J f^- < +\infty$ puisque $0 \le f^+ \le |f|$ et $0 \le f^- \le |f|$. Réciproquement, si $\int_J f^+ < +\infty$ et $\int_J f^- < +\infty$, alors $\int_J |f| = \int_J f^+ + \int_J f^- < +\infty$.

Considérons maintenant f définie p.p. sur J et à valeurs *complexes*. Elle est dite intégrable sur J si $\Re f$ et $\Im f$ sont intégrables sur J. L'intégrale de f est alors définie par :

$$\int_J f = \int_J \Re f + i \int_J \Im f$$

On voit que f est intégrable sur J ssi son module est intégrable sur J. En effet, $|\Re f| \le |f|$ et $|\Im f| \le |f|$, donc si $|f|$ est intégrable, il en est de même des parties réelles et imaginaires de f. Réciproquement, si $\Re f$ et $\Im f$ sont intégrables, alors $|f| = \sqrt{(\Re f)^2 + (\Im f)^2} \le |\Re f| + |\Im f|$ aussi.

Remarque. Pour comprendre en quoi la construction de Lebesgue est différente de celle de Riemann, on notera qu'approcher l'intégrale d'une fonction positive par celle de la fonction étagée (I.3) revient à découper l'aire sous la courbe en bandes *parallèles à l'axe des abscisses* (et non parallèles à l'axe des ordonnées comme dans les sommes de Riemann). Toutes les fonctions positives rencontrées en pratique peuvent être approchées par de telles fonctions f_n, d'où la généralité du procédé, mais on notera que les ensembles $f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)$ et $f^{-1}\left([n, +\infty]\right)$ peuvent avoir une structure bien plus complexe que les intervalles utilisés dans l'intégrale de Riemann.

1.3 Lien avec l'intégrale de Riemann

Pour des rappels sur l'intégrale de Riemann (notamment la notion de somme de Riemann) et les intégrales impropres (ou généralisées) au sens de Riemann, le lecteur pourra par exemple se reporter à *Algèbre et Analyse* de Balac et Sturm.

Théorème 1.1 *Soit f bornée sur un intervalle borné J. Si f est intégrable au sens de Riemann sur J, alors f est intégrable au sens de Lebesgue et on a :*

$$\int_J f = \int_J f(x)\,dx$$

où l'on a noté $\int_J f(x)\,dx$ l'intégrale de Riemann de f sur J.

Notamment le calcul de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction *continue* se fait de façon tout à fait classique, par calcul d'une primitive, après avoir au besoin effectué une intégration par parties ou un changement de variable.

Remarque. La réciproque est fausse : il existe des fonctions bornées sur un intervalle borné non intégrables au sens de Riemann mais intégrables au sens de Lebesgue. Un contre-exemple classique est fourni par $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. La fonction f est p.p. nulle, donc est intégrable au sens de Lebesgue et d'intégrale nulle. Par contre, f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$. En effet, l'ensemble des fonctions en escalier sur $[0, 1]$ majorant f possède un plus petit élément : la fonction constante égale à 1. De même, l'ensemble des fonctions en escalier minorant f possède un plus grand élément : la fonction constante égale à 0. Comme $\int_0^1 (1 - 0)\,dx = 1$, il n'est pas possible de trouver deux fonctions en escalier g et h telles que $g \le f \le h$ et $\int_0^1 \big(h(x) - g(x)\big)\,dx \le 1/2$.

Théorème 1.2 *Soit J un intervalle quelconque et f une fonction définie sur J. Si l'intégrale impropre de f sur J (au sens généralisé de Riemann) converge absolument, alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur J et on a*

$$\int_J f = \int_J f(x)\,dx$$

où l'on a noté $\int_J f(x)\,dx$ l'intégrale généralisée de Riemann de f sur J.

On peut donc utiliser tous les critères classiques d'étude des intégrales impropres de fonctions **positives** : majoration, minoration, équivalents.

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ ssi $\alpha < 1$.
3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

On voit que l'intégrale de Lebesgue est une bonne généralisation de l'intégrale de Riemann. Par contre les intégrales impropres semi-convergentes (*i.e.* convergentes mais non absolument convergentes) ne rentrent pas dans ce cadre, ce qui n'empêche pas de les utiliser avec les techniques usuelles vues en premier cycle (passage à la limite dans des intégrales « ordinaires »).

Exemple. On considère la fonction, dite *sinus cardinal*, $x \mapsto \frac{\sin x}{x} = \mathrm{sinc}\,(x)$, prolongée par continuité en $x = 0$ par la valeur $\mathrm{sinc}\,(0) = 1$. Elle joue un rôle fondamental dans de nombreuses applications, notamment en traitement du signal et en optique. Il importe donc de conserver son graphe en mémoire (cf figure I.2).

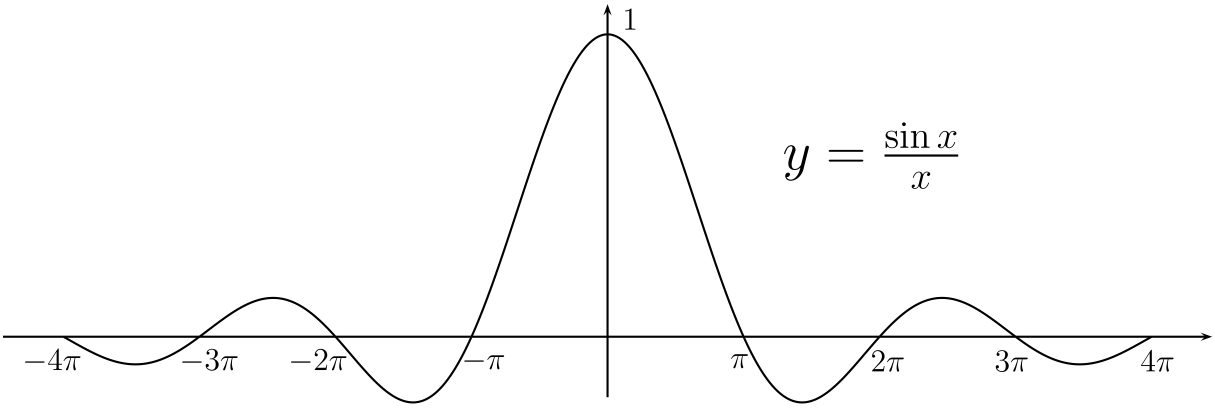

FIGURE I.2 – *La fonction* sinc.

On démontre (cf. exercice I.4) que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente, mais non absolument convergente. Plus précisément, on a (cf. chapitre X paragraphe 5.5) :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

mais on a aussi :

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$

En effet, cette intégrale est la somme d'une infinité d'aires (cf. figure I.3), et on montre que la série correspondante est divergente. La fonction sinc est donc non intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$ bien que son intégrale au sens généralisé de Riemann converge. Autrement dit, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ ne désigne pas une intégrale de Lebesgue.

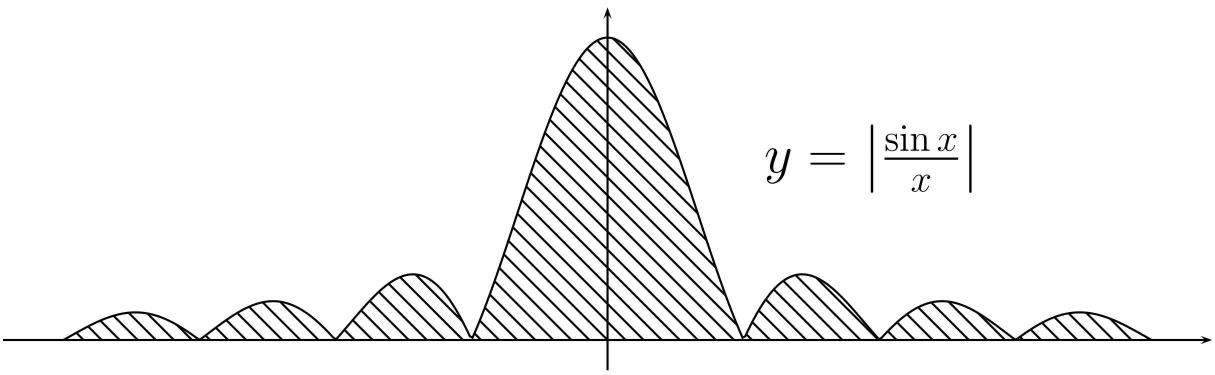

FIGURE I.3 – *La fonction* $|\mathrm{sinc}|$. *La somme des aires hachurées est infinie.*

1.4 Espaces L^1 et L^2

Rappelons que nous considérons comme égales deux fonctions égales p.p. (et que nos fonctions sont toutes supposées mesurables). Avec cette convention, nous avons la définition suivante.

Définition 1.2 *Soit J un intervalle. On note $L^1(J)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes intégrables sur J :*

$$L^1(J) = \left\{ f \,:\, J \to \mathbb{C} \;;\; \int_J |f| < +\infty \right\}$$

On note $L^2(J)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur J :

$$L^2(J) = \left\{ f \,:\, J \to \mathbb{C} \;;\; \int_J |f|^2 < +\infty \right\}$$

Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, nous noterons tout simplement L^1 et L^2 les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

Exemples.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors :

$$\begin{array}{lcl} f \in L^1\big([1,+\infty[\big) & \Longleftrightarrow & \alpha > 1 \\ f \in L^1\big(]0,1]\big) & \Longleftrightarrow & \alpha < 1 \\ f \in L^2\big([1,+\infty[\big) & \Longleftrightarrow & \alpha > \frac{1}{2} \\ f \in L^2\big(]0,1]\big) & \Longleftrightarrow & \alpha < \frac{1}{2} \end{array}$$

   Remarquons que cela implique que, pour toute valeur de α, $f \notin L^1\big(]0,+\infty[\big)$.

2. Démontrons que $\ln \in L^1\big(]0,1]\big)$. On a

$$\int_{]0,1]} |\ln| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 (-\ln x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \big[-x\ln x + x \big]_\varepsilon^1 = 1 < +\infty$$

   puisque $\varepsilon \ln \varepsilon$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.
   Notons que pour démontrer que l'intégrale sur $]0,1]$ de la valeur absolue de ln est finie, on s'est ramené au calcul d'une intégrale impropre absolument convergente.
   $\int_{]0,1]} \ln$ existe donc au sens de Lebesgue. Le même calcul sans les valeurs absolues montre que la valeur de l'intégrale est

$$\int_{]0,1]} \ln = \int_0^1 \ln x \, dx = -1$$

   On peut aussi le voir en notant que ln reste négatif sur $]0,1]$, de sorte que son intégrale sur $]0,1]$ est l'opposée de l'intégrale de sa valeur absolue.
   Géométriquement, l'intégrabilité de ln sur $]0,1]$ signifie que l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et la courbe $y = \ln x$ est finie (plus précisément, elle est égale à 1), bien que la fonction ln tende vers $-\infty$ en 0.

Remarque. Puisque nous identifions deux fonctions égales presque-partout, il n'y pas de différence à faire entre $L^1\big([a,b]\big), L^1\big(]a,b]\big), L^1\big([a,b[\big), L^1\big(]a,b[\big)$. Par exemple, nous aurions tout aussi bien pu dire que la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est dans $L^1\big([0,1]\big)$ ssi $\alpha < 1$, bien que la valeur de f en 0 ne soit pas définie (l'ensemble $\{0\}$ est de mesure nulle).