

Table des matières

1	Dénombrement	13
1.1	Rappels ensemblistes	13
1.1.1	Opérations ensemblistes	13
1.1.2	Bijections	15
1.2	Ensembles finis et dénombrement	17
1.3	Dénombrabilité	24
1.4	Exercices	33
2	Sommes	37
2.1	Rappels sur les séries	37
2.1.1	Généralités	37
2.1.2	Séries à termes positifs	39
2.1.3	Séries à termes de signe non constant	41
2.1.4	Opérations sur les séries	42
2.2	Familles sommables	47
2.3	Séries doubles	60
2.4	Exercices	64
3	Intégrale de Riemann sur $[a, b]$	69
3.1	Construction	69
3.2	Riemann intégrabilité	76
3.3	Propriétés de l'intégrale de Riemann	83
3.3.1	Propriétés de l'ensemble $\mathcal{R}[a, b]$	83
3.3.2	Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration	88
3.4	Interversion limite intégrale	95
3.5	Exercices	97
4	Intégrale généralisée	99
4.1	Construction	99
4.2	Critère de Cauchy pour intégrales généralisées	110
4.3	Intégrales généralisées de fonctions positives	116
4.4	Divers	121

4.4.1	Changements de variable	121
4.4.2	Intégration par parties	124
4.4.3	Comparaison des intégrales ordinaires et généralisées	127
4.5	Un aperçu sur les intégrales multiples	128
4.5.1	Intégration sur un pavé	128
4.5.2	Intégration sur un ensemble borné	131
4.5.3	Ensembles et fonctions admissibles	135
4.5.4	Intégrales répétées	141
4.5.5	Changement de variable	145
4.5.6	Intégrale multiple généralisée	146
4.6	Exercices	152
5	Évènements et probabilités	155
5.1	Notion de mesure	155
5.2	Modéliser l'aléatoire	161
5.2.1	Notion d'expérience aléatoire	161
5.2.2	Évènements	162
5.2.3	Une question de dés	163
5.3	La probabilité comme mesure	166
5.4	Exemples	172
5.5	Remarques sur le choix d'un modèle	179
5.6	Probabilités conditionnelles	181
5.6.1	Introduction	181
5.6.2	Propriétés	183
5.6.3	Quelques exemples	186
5.7	Indépendance	188
5.7.1	Indépendance de deux évènements	188
5.7.2	Indépendance mutuelle	191
5.7.3	Épreuves répétées	192
5.7.4	L'algorithme du rejet	193
5.8	Exercices	195
6	Variables aléatoires	203
6.1	Introduction	203
6.2	Généralités	206
6.2.1	Variables aléatoires réelles	206
6.2.2	Loi d'une variable aléatoire	208
6.2.3	Fonction de répartition	211
6.2.4	Lois à densité	214
6.3	Lois discrètes classiques	220
6.3.1	Lois de Bernoulli	221
6.3.2	Loi uniforme sur un ensemble fini de réels	221
6.3.3	Lois binomiales	221
6.3.4	Lois hypergéométriques	222

6.3.5	Lois géométriques	224
6.3.6	Lois de Poisson	225
6.3.7	Sur le caractère universel de la loi de Poisson	230
6.4	Lois à densité classiques	233
6.4.1	Lois uniformes	233
6.4.2	Lois exponentielles	234
6.4.3	Lois gaussiennes	237
6.4.4	Lois de Cauchy	239
6.5	Un exemple de loi continue sans densité	239
6.6	Exercices	243
7	Espérance	251
7.1	Introduction	251
7.2	Espérance d'une variable aléatoire positive	254
7.3	Espérance d'une variable aléatoire réelle	270
7.4	Moments	276
7.5	Exercices	283
8	Vecteurs aléatoires et indépendance	295
8.1	Vecteurs aléatoires	296
8.1.1	Généralités	296
8.1.2	Covariance de deux variables aléatoires	305
8.1.3	Espérance et covariance d'un vecteur aléatoire	308
8.2	Indépendance de variables et vecteurs aléatoires	312
8.2.1	Suites indépendantes	312
8.2.2	Indépendance des composantes	316
8.2.3	Indépendance et espérance de produits	324
8.3	Exercices	328
9	Théorèmes limite	333
9.1	Convergences de suites de variables aléatoires	333
9.1.1	Convergence presque sûre et en probabilité	333
9.1.2	Convergence en moyenne d'ordre p	342
9.1.3	Bilan sur les modes de convergence	347
9.2	Loi des grands nombres	348
9.2.1	Loi faible des grands nombres	348
9.2.2	Loi forte des grands nombres	349
9.2.3	L'aiguille de Buffon	352
9.3	Exercices	356
10	Théorème limite central	363
10.1	Convergence en loi	363
10.2	Normalité asymptotique	369
10.2.1	Sommes de variables aléatoires i.i.d.	370

10.2.2	Vitesse de convergence dans le TLC	372
10.2.3	Intervalle de confiance pour une probabilité inconnue	374
10.2.4	Généralisation du TLC	376
10.3	Théorème limite central vectoriel	379
10.3.1	Vecteurs aléatoires gaussiens	379
10.3.2	TLC vectoriel	383
10.4	Compléments sur la convergence en loi et le TLC	385
10.4.1	Outillage pour la convergence en loi	385
10.4.2	Démonstration du TLC	393
10.5	Exercices	401
11	Indications et solutions	413
11.1	Exercices du chapitre 1	413
11.2	Exercices du chapitre 2	416
11.3	Exercices du chapitre 3	421
11.4	Exercices du chapitre 4	423
11.5	Exercices du chapitre 5	428
11.6	Exercices du chapitre 6	444
11.7	Exercices du chapitre 7	462
11.8	Exercices du chapitre 8	484
11.9	Exercices du chapitre 9	489
11.10	Exercices du chapitre 10	494
	Tables de la loi normale	519
	Bibliographie	521
	Index	523