CHAPITRE 1. LES SUITES NUMÉRIQUES

Capacités attendues

- Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer par un moyen informatique ou avec une calculatrice la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer un seuil pour une suite.

➢ **Prérequis**

- Savoir calculer un terme d'une suite donnée par une relation de récurrence
- Savoir représenter les termes d'une suite sur un graphique

➢ **Exercices 1 à 5**

Pour se préparer

Calculer les termes d'une suite

Objectif
Calculer les premiers termes d'une suite en utilisant sa définition et se familiariser avec les différentes écritures d'une suite.

Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2 \times n + 3$.
Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et telle que chaque terme s'obtient à partir du précédent en lui ajoutant 2. Donner une définition de cette suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction à déterminer.
Que peut-on constater ?

Modes de génération d'une suite

Objectif
Voir les différents modes de génération d'une suite.

A. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier n supérieur à 1 par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de cette suite (vous donnerez les résultats exacts puis une valeur approchée de chacun d'eux).

2. Peut-on calculer directement le $10^{\text{ème}}$ terme sans avoir calculé les termes précédents de cette suite ? Calculer ce $10^{\text{ème}}$ terme avec l'aide de votre calculatrice.
3. Représenter cette suite graphiquement. On peut penser que les valeurs se rapprochent d'un réel (en donner une approximation)
4. On pose $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donner une valeur approchée de ce réel (il s'agit du célèbre « **nombre d'or** ») . À partir de quel entier n a-t-on $|u_n - \Phi| \leq 10^{-5}$?

On dira que cette suite est **définie par récurrence** et qu'elle **converge** vers Φ.

B. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de cette suite et donner leurs valeurs approchées.
2. Cette suite semble converger vers un nombre, de quel nombre s'agit-t-il ? quel semble être son sens de variation ?
3. Exprimer v_{n+1} en fonction de n puis montrer que pour tout entier naturel n on a $v_n - v_{n+1} \leq 0$.
4. On considère maintenant la fonction f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en utilisant les résultats sur les limites que vous connaissez.
5. On dira que cette suite est définie de manière fonctionnelle, est croissante et qu'elle converge vers 2

Déterminer en résolvant une inéquation l'entier n à partir duquel on a $|v_n - 2| \leq 10^{-5}$.

Objectif
Obtenir à l'aide d'une calculatrice le sens de variation d'une suite.

Sens de variation d'une suite et inflation

A. Inflation

Dans un pays imaginaire où l'inflation serait de 10 % l'an, quel serait le prix d'un bien de consommation de prix actuel P_0 dans 2 ans ?

En fait, si on note P_n le prix du bien de consommation au début de l'année n, on s'aperçoit que la suite des prix (P_n) peut s'écrire $P_{n+1}=1.1P_n$. Montrer que cette suite est croissante de deux manières différentes (en utilisant $P_{n+1} - P_n$ puis le quotient P_{n+1} / P_n).
Calculer en combien de temps ce prix doublerait, triplerait.
Refaire la question précédente en utilisant un programme de calculatrice.

B. Sens de variation

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie dans l'activité 1. Cette suite est-elle croissante ? Décroissante ?

Pour montrer qu'une (u_n) suite est croissante on montre généralement que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n.
Pour montrer qu'une (u_n) suite est décroissante on montre généralement que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier n.
Pour montrer qu'une suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante il suffit de comparer trois termes consécutifs de cette suite

1. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$
2. Déterminer le sens de variation des suites définies par :
   a. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$
   b. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} \end{cases}$
   c. $u_n = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   d. $u_n = -2 \times 3^n$

LE COURS

1. Les suites arithmétiques et géométriques

1.1. Les suites arithmétiques

Définition. On appelle suite arithmétique une suite définie par son premier terme et une relation du type $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel appelé la raison de la suite.

En fait chaque terme d'une suite arithmétique s'obtient à partir du précédent en lui additionnant un réel constant.

Calcul du terme général

Pour passer du premier terme à un terme quelconque de la suite arithmétique de raison r il suffit d'ajouter r autant de fois qu'il le faut, on obtient suivant que le premier terme de la suite est u_0 ou u_1 : $\boxed{u_n = u_0 + nr \quad \text{ou} \quad u_n = u_1 + (n-1)r}$

Calcul de la somme de termes consécutifs

On considère la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Calculons la somme de ses 6 premiers termes uniquement en fonction de son premier terme et de sa raison. On obtient

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + ... + u_5 = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) + (u_0 + 4r) + (u_0 + 5r) \\ &= 6u_0 + 15r \end{aligned}$$

On fait le même travail en calculant les termes en fonction de U_5.

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + ... + u_5 = (u_5 - 5r) + (u_5 - 4r) + (u_5 - 3r) + (u_5 - 2r) + (u_5 - r) + u_5 \\ &= 6u_5 - 15r \end{aligned}$$

Nous obtenons en additionnant : $2S = 6(u_0 + u_5)$.

De manière générale nous aurons :

$$\boxed{\boldsymbol{u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{\textbf{nombre de termes (1er terme + dernier terme)}}{2}}}$$

1.2. Les suites géométriques

Définition. On appelle suite géométrique une suite définie par son premier terme et une relation du type $u_{n+1} = u_n \times q$ où q est un réel appelé la raison de la suite.

Chaque terme d'une suite géométrique s'obtient à partir du précédent en le multipliant par un réel constant.

Calcul du terme général

On procède comme pour les suites arithmétiques en remplaçant l'addition par la multiplication et on obtient $\boxed{u_n = u_0 \times q^{n+1} \text{ ou } u_n = u_1 \times q^n}$

Calcul de la somme de termes consécutifs

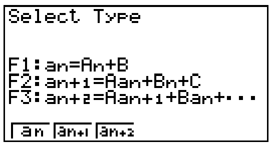
$$\boxed{\boldsymbol{u_0 + u_1 + ... + u_n = \textbf{premier terme} \times \frac{1 - q^{\textbf{nombre de termes}}}{1 - q}}}$$

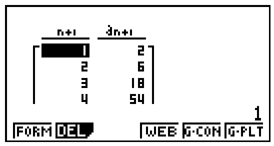
A1. Calculs de termes d'une suite avec une calculatrice

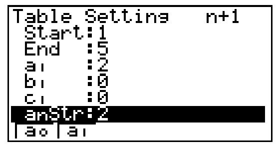
1. *Pour une suite géométrique définie par récurrence.*
Calculer les 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3
2. *Pour une suite définie de manière fonctionnelle.*
Calculer les 5 premiers termes de la suite définie par $u_n = 3 \times 0.2^n$.

➢ **Correction**

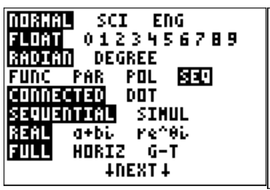
1. Avec une Casio Graph 35+ ou autre Calculatrice Casio :
On se met en mode suites (récurrence), on choisit $\boxed{\text{type}}$. Dans ce cas il s'agit de $\boxed{\text{F2}}$ (donc $\boxed{\text{an+1}}$). Ensuite on fait $\boxed{\text{exit}}$ et on obtient l'écran suivant qu'on complète.
De nouveau on fait $\boxed{\text{exit}}$, puis $\boxed{\text{set}}$ et on remplit le tableau, ensuite on fait de nouveau $\boxed{\text{exit}}$ puis $\boxed{\text{table}}$ pour obtenir les résultats :

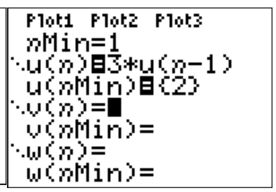


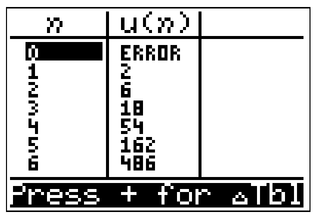




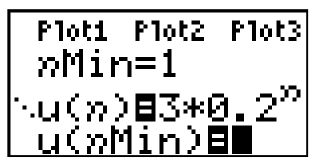
Avec une TI-83(ou 84) on choisit le $\boxed{\text{mode}}$ $\boxed{\text{seq}}$: ensuite $\boxed{\text{Y=}}$
On complète ensuite le tableau pour la fonction : le u s'obtient avec la touche $\boxed{2^{\text{nde}}}$ $\boxed{7}$ et le n avec la touche $\boxed{\text{x,T,}\theta\text{,n}}$. Il suffit ensuite de faire $\boxed{\text{table}}$ pour obtenir les résultats.







2. Dans ce second cas les manipulations sont plus simples :
Avec Casio : dans ce cas il s'agit de $\boxed{\text{F1}}$ (donc $\boxed{\text{an}}$). Les manipulations sont ensuite identiques à celles du cas précédent.
Avec TI : on procède de la même manière, seules les deux premières lignes sont alors à compléter.



Sans correction

A2. Calculer le 10ème terme de la suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison 1/2.

- Par le calcul en valeur exacte.
- Avec votre calculatrice directement

Calculer ensuite la somme des 5 premiers termes de cette suite.

➢ **Exercices 6 à 9**

2. Utiliser un algorithme et l'adapter pour une calculatrice

2.1. Pour déterminer un seuil

Déterminer à partir de quel entier n on a $1.05^n > 2$

L'algorithme en français

Initialiser N
Tant que 1.05^N≤2
Augmenter N de 1
Fin Tant que
Afficher N
Fin

En langage « Algobox »

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (pow(1.05,N)<=2) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

```
***Algorithme lancé***
15
***Algorithme terminé***
```

En langage « TI »

```
PROGRAM:ALGO
:0→N
:While 1.05^N≤2
:N+1→N
:End
:Disp N
```

```
prgmALGO
                15
              Done
```

Bon à savoir En langage algobox a^n s'écrit pow(a,n), En langage calculatrice l'instruction « tant que » se traduit par « while ».

En langage « Casio »

```
======ALGO    ======
0→N↵
While 1.05^N≤2↵
N+1→N↵
WhileEnd↵
N◢
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

Le « while » s'obtient en faisant $\boxed{\text{PRGM}}$, $\boxed{\text{COM}}$, $\boxed{\text{F6}}$, $\boxed{\text{F6}}$, $\boxed{\text{Whle}}$
Le « WhileEnd » est à côté. Le symbole ≤ s'obtient en faisant $\boxed{\text{PRGM}}$, $\boxed{\text{F6}}$, $\boxed{\text{REL}}$.

2.2. Pour déterminer la somme de termes

Calculer $1+2+2^2+\ldots+2^{10}$

L'algorithme en français

Initialiser S
Initialiser N
Pour N allant de 0 à 10
Augmenter S de 2^N
Fin pour
Afficher S
Fin

En langage « Algobox »

```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  N PREND_LA_VALEUR 0
  POUR N ALLANT_DE 0 A 10
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR pow(2,N)+S

    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

```
***Algorithme lancé***
2047
***Algorithme terminé***
```

En langage « TI »

```
PROGRAM:SOMME
:0→N
:0→S
:For(N,0,10)
:2^N+S→S
:End
:Disp S
:
```

En langage « Casio ». Notez bien la syntaxe pour l'instruction « for   to ».

```
======SOMME    ======
0→N↵
0→S↵
For 0→N To 10↵
2^N+S→S↵
Next↵
S◢
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

A3. Créer et mettre en œuvre un algorithme

On pose $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ pour tout entier naturel n.

Calculer les premiers termes de cette suite avec votre calculatrice, puis u_{100} et u_{1000}. Il semble que cette suite **converge** vers 2.

Écrire un algorithme pour déterminer le plus petit entier n tel que : $|u_n - 2| < 10^{-5}$.

Refaire ensuite cette question en adaptant cet algorithme à votre calculatrice et en remplaçant 10^{-5} par 10^{-3}.

- **Correction**

Il semble donc que plus n grandit plus u_n s'approche de 2.

L'algorithme en français

Initialiser N

Tant que $\left|\dfrac{2n-3}{n+1} - 2\right| \geq 10^{-5}$

Augmenter N de 1

Fin Tant que

Afficher N

Fin

En langage « Algobox »

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (abs((2*N-3)/(N+1)-2)>=pow(10,-5)) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

```
***Algorithme lancé***
500000
***Algorithme terminé***
```

Pour reprendre cet algorithme avec votre calculatrice il suffit d'adapter le programme adéquat de la page précédente.

A4. Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de raison 1.05 et de premier terme 500. Vérifier en utilisant un algorithme.

- **Correction**

Par le calcul : $S = 500 \times \dfrac{1-1.05^{10}}{1-1.05} \approx 6289$.

Pour l'algorithme nous n'avons fait figurer que les lignes modifiées par rapport à l'algorithme de la page précédente.

```
S PREND_LA_VALEUR 500
AFFICHER N
POUR N ALLANT_DE 0 A 9
  DEBUT_POUR
  S PREND_LA_VALEUR S+pow(1.05,N)*500
```

Sans correction

A5. On place tous les ans 1000€ au taux de 1.5 % l'an pendant 10 années consécutives. Quelle somme totale pourra-t-on récupérer à la fin de la $10^{\text{ème}}$ année ?

Faire cet exercice en utilisant la formule donnant la somme puis en utilisant un programme de votre calculatrice.

- **Exercices 10 et 12**

2.3. Interprétation

Si pour tout entier p on peut trouver un entier N tel que $Un > 10^p$ pour tout entier n supérieur à N *(autrement dit : si on peut rendre U_n aussi grand que l'on veut à condition que n soit grand)* on dit que la limite de la suite est $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

De la même manière, si on peut rendre la différence $\left|U_n - l\right|$ aussi petite qu'on le veut, on dit que la limite de la suite est l lorsque n tend vers l'infini.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.